

Éléments de théorie des graphes

Springer

Paris

Berlin

Heidelberg

New York

Hong Kong

Londres

Milan

Tokyo

Alain Bretto, Alain Faisant,
François Hennecart

Éléments de théorie des graphes



Alain Bretto

Département d'informatique
Université de Caen – Campus II
Boulevard Maréchal Juin
BP 5186, 14032 Caen

Alain Faisant

Département de mathématiques
Université Jean-Monnet
23, rue du docteur Paul Michelon
42023 Saint-Étienne Cedex 2

François Hennecart

Département de mathématiques
Université Jean-Monnet
23, rue du docteur Paul Michelon
42023 Saint-Étienne Cedex 2

ISBN : 978-2-8178-0280-0 Springer Paris Berlin Heidelberg New York

© Springer-Verlag France, 2012

Springer-Verlag France est membre du groupe Springer Science + Business Media

Cet ouvrage est soumis au copyright. Tous droits réservés, notamment la reproduction et la représentation, la traduction, la réimpression, l'exposé, la reproduction des illustrations et des tableaux, la transmission par voie d'enregistrement sonore ou visuel, la reproduction par microfilm ou tout autre moyen ainsi que la conservation des banques de données. La loi française sur le copyright du 9 septembre 1965 dans la version en vigueur n'autorise une reproduction intégrale ou partielle que dans certains cas, et en principe moyennant les paiements des droits. Toute représentation, reproduction, contrefaçon ou conservation dans une banque de données par quelque procédé que ce soit est sanctionnée par la loi pénale sur le copyright. L'utilisation dans cet ouvrage de désignations, dénominations commerciales, marques de fabrique, etc., même sans spécification ne signifie pas que ces termes soient libres de la législation sur les marques de fabrique et la protection des marques et qu'ils puissent être utilisés par chacun. La maison d'édition décline toute responsabilité quant à l'exactitude des indications de dosage et des modes d'emplois. Dans chaque cas il incombe à l'utilisateur de vérifier les informations données par comparaison à la littérature existante.

Maquette de couverture : Jean-François Montmarché

Illustration de couverture : Fotolia – connections © adimas

Mise en page : Nicolas Puech



Collection IRIS

Dirigée par Nicolas Puech

Ouvrages parus :

– *Méthodes numériques pour le calcul scientifique. Programmes en Matlab*

A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri, Springer-Verlag France 2000

– *Calcul formel avec MuPAD*

F. Maltey, Springer-Verlag France 2002

– *Architecture et micro-architecture des processeurs*

B. Gnossens, Springer-Verlag France 2002

– *Introduction aux mathématiques discrètes*

J. Matousek, J. Nešetřil, Springer-Verlag France 2004

– *Les virus informatiques : théorie, pratique et applications*

F. Filiol, Springer-Verlag France 2004

– *Computer Viruses: from theory to applications*

E. Filiol, Springer-Verlag France 2005

– *Introduction pratique aux bases de données relationnelles. (2^e éd.)*

A. Meier, Springer-Verlag France 2006

– *Bio-informatique moléculaire. Une approche algorithmique*

P. A. Pevzner, Springer-Verlag France 2006

– *Algorithmes d'approximation*

V. Vazirani, Springer-Verlag France 2006

– *Techniques virales avancées*

É. Filiol, Springer-Verlag France 2007

– *Codes et turbocodes*

C. Berrou, Springer-Verlag France 2007

– *Introduction à Scilab. (2^e éd.)*

J.P. Chancelier, F. Delebecque, C. Gomez, M. Goursat, R. Nikouhah, S. Steer,
Springer-Verlag France 2007

– *Maple : règles et fonctions essentielles*

N. Puech, Springer-Verlag France 2009

– *Les virus informatiques : théorie, pratique et applications. (2^e éd.)*

É. Filiol, Springer-Verlag France 2009

– *Codes and Turbo Codes*

C. Berrou, Springer-Verlag France 2010

– *Optimisation combinatoire : théorie et algorithmes*

B. Korte, J. Vygen, Springer-Verlag France 2010

– *Concepts et méthodes en phylogénie moléculaire*

G. Perrière, C. Brochier-Armanet, Springer-Verlag France 2010

– *Enseigner l'informatique*

W. Hartmann, M. Näf, R. Reichert, Springer-Verlag France 2012

Avant-propos

En quelques décennies, la théorie des graphes est devenue l'un des domaines les plus féconds et les plus dynamiques des mathématiques et de l'informatique. Cette évolution constante est sans doute due au large spectre des applications telles que l'électronique, la linguistique, la chimie, la sociologie, les mathématiques, l'informatique...

Le début a été hésitant : l'histoire veut que la théorie des graphes ait commencé avec l'article du mathématicien suisse Leonhard EULER sur le problème des ponts de Königsberg (voir *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae Vol 8 (1736), 128–140).

Néanmoins il faudra attendre deux siècles pour que le premier livre paraisse sur le sujet. Celui-ci a été écrit par Dénes KÖNIG en 1936 (voir *Theorie der Endlichen und Unendlichen Graphen*, Teubner, Leipzig, 1936).

Le développement de la théorie des graphes est assez similaire au développement de la théorie des probabilités dont beaucoup de résultats sont dus à l'effort de compréhension des jeux de hasard. Les graphes ont d'abord été considérés comme curiosité mathématique et comme outil pour étudier les jeux logiques : on peut citer par exemple le problème du cavalier du jeu d'échec devant visiter chaque case de l'échiquier exactement une fois tout en revenant à la case de départ. Ils sont devenus maintenant incontournables dans diverses activités humaines. À la suite d'EULER, beaucoup de mathématiciens se sont intéressés aux graphes ; citons en quelques-uns :

- Edouard LUCAS pose le problème des demoiselles : *des jeunes filles, en nombre pair, se promènent chaque jour deux par deux. On demande comment il faut disposer les promenades de sorte que chacune d'entre elles se retrouve une et une fois seulement en compagnie de chacune des autres.*

Nous développons au chapitre 8 les outils qui permettent de ré-

soudre ce type de problème.

- En 1856, William R. HAMILTON étudie un problème apparemment aussi simple, celui de trouver un chemin passant une fois et une seule par chaque sommet d'un graphe. Cela donnera naissance au concept de graphe hamiltonien (voir chapitre 2).
- Arthur CAYLEY, James J. SYLVESTER puis George POLYA développent la notion d'arbre (voir chapitre 2).
- En 1840, August F. MÖBIUS propose le problème suivant : *un roi a cinq fils et souhaite qu'à sa mort son royaume soit divisé en cinq provinces de telle sorte que chaque province ait une frontière commune avec chacune des autres.*

Cela revient à décider si le graphe K_5 est planaire. Nous aborderons la notion de graphe planaire au chapitre 5.

Cette théorie permet de représenter un ensemble complexe d'objets en exprimant les relations entre les éléments ; par exemple réseaux de communication, génétique, circuits électriques, mais également en mathématiques : la classification des groupes simples finis fait appel aux graphes par l'intermédiaire des cartes et des dessins d'enfant (redécouverts en 1984 par Alexandre GROTHENDIECK dans *Esquisse d'un programme*). Il faudra néanmoins attendre le milieu du XX^e siècle pour qu'une étude systématique soit entreprise. Aujourd'hui c'est une théorie « foisonnante » aux frontières de domaines plus classiques tels que la topologie, l'algèbre, la géométrie, l'algorithmique et ses applications. Son langage et ses notations ne sont pas encore stabilisés et sont parfois liés au domaine dans lequel la théorie des graphes est employée.

Nous avons essayé dans cet ouvrage d'unifier les définitions et les résultats, et de les placer dans le cadre le plus général possible. Cependant il n'est pas facile d'avoir le même langage pour les graphes simples, les multigraphes, les graphes orientés (ou digraphes). . . Le contenu n'est pas standard (bien que beaucoup de chapitres traitent d'éléments classiques) au sens d'une introduction habituelle aux graphes. Nous avons insisté sur l'aspect algébrique et topologique, mais également sur les derniers développements de la théorie (notamment les aspects spectraux, voir chapitre 9). Afin de rendre le lecteur autonome, nous avons volontairement détaillé les preuves et introduit des rappels tout au long de l'ouvrage. Certains chapitres et paragraphes de ce livre ne sont pas faciles et peuvent être omis en première lecture. Néanmoins le but affirmé de ce livre est d'emmener le lecteur au seuil de la recherche.

Dans le premier chapitre, nous introduisons les graphes et le langage de base. Certaines notions élémentaires sur la complexité algorithmique sont également abordées ; les deux derniers paragraphes sont d'un niveau un peu plus élevé et peuvent être ignorés lors d'une première lecture.

Le deuxième chapitre a pour objet l'introduction de différentes classes de graphes (graphes bipartis, arbres, arborescences...). Les derniers paragraphes traitent des graphes eulériens et hamiltoniens.

Dans le chapitre trois, nous étudions les relations entre les graphes et les structures de données algorithmiques. De manière plus précise, nous montrons que la notion de graphe est fondamentale quand on veut représenter des données informatiques. Des notions telles que les arbres binaires de recherche, les arbres de priorité, les tas... sont abordés. Ce chapitre est un cours classique d'algorithmique et de structures de données généralement étudié en première et deuxième années de licence d'informatique.

Ces trois chapitres n'utilisent aucun concept difficile et peuvent être lus par un étudiant ayant le niveau d'un baccalauréat scientifique : ils nécessitent cependant quelques compléments sur des structures mathématiques généralement abordées en début d'études supérieures, qui sont introduits au cours du texte.

Le chapitre quatre, qui introduit la connexité et les flots, bien que n'utilisant aucune notion difficile, est un peu plus théorique. Néanmoins il peut être lu par une personne ayant un niveau licence première et deuxième années en mathématiques ou informatique.

Le chapitre cinq traite de la notion de planarité et ne peut être abordé que par un lecteur ayant de bonnes notions sur la topologie du plan. Nous avons développé en annexe des éléments de cette topologie ; une preuve explicite détaillée du théorème de JORDAN, version polygonale, est également donnée.

Au chapitre six, les aspects algébriques (élémentaires) de la théorie des graphes sont étudiés. Ce chapitre ne présente pas vraiment de difficultés pour un étudiant de licence de mathématiques ou informatique première ou deuxième année.

Les chapitres sept et huit introduisent les colorations et les couplages de graphes. Certains théorèmes sont assez difficiles et peuvent être négligés lors d'une première lecture.

Le chapitre neuf aborde la théorie spectrale des graphes (avatar plus récent de la théorie des graphes) et demande des connaissances plus élaborées en algèbre (niveau milieu de licence de mathématiques).

Le dernier chapitre n'utilise pas d'outils très profonds mais les concepts manipulés et les résultats démontrés sont assez abstraits. Il est donc conseillé seulement en deuxième lecture.

On trouvera une courte liste de textes classiques sur les graphes à la fin de l'ouvrage. Par commodité nous avons mentionné en note de bas de page les quelques références utilisées dans l'exposé.

Caen, Saint-Étienne le 26 juillet 2011,
Alain Bretto,
Alain Faisant,
François Hennecart.

« Essayez de représenter sur du papier les structures de ces intrigues enchevêtrées en figurant chaque personnage par un point se déplaçant à la fois dans l'espace et dans le temps. Vous obtiendrez ainsi des graphes (dans le sens que les mathématiciens Koenigs et Claude Berge donnent à ce terme) assez comparables à ceux qui sont en usage dans les bureaux des compagnies de chemin de fer, et il vous sera aisé de vérifier que, tout en étant très serrés, ils n'impliquent jamais contradiction et ne pourraient jamais engendrer de déraillements ou de collisions. »

François Le Lionnais (préface au roman *Les habits noirs* de Paul Féval, coll. *Bouquins*, t. 2).

Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier chaleureusement tous ceux qui les ont aidés lors de la préparation de ce livre et particulièrement Thierry CHARNOIS (maître de conférences à l'Université de Caen), François FOUCAULT (maître de conférences à l'Université de Saint-Étienne), Alkis GRECOS (professeur à l'Université Libre de Bruxelles), Georges GREKOS (maître de conférences à l'Université de Saint-Étienne), Jean-Marie LEBARS (maître de conférences à l'Université de Caen), Éric REYSSAT (professeur à l'Université de Caen), Philippe TOFFIN (maître de conférences à l'Université de Caen).

À propos des auteurs

Alain BRETTO est professeur à l'Université de Caen Basse-Normandie. Il enseigne également à AgroParisTech et a précédemment enseigné aux États Unis et en Italie. Ses recherches portent sur la théorie des graphes et des hypergraphes, plus précisément sur leurs aspects algébriques et topologiques. Expert reconnu dans ces domaines, Alain BRETTO s'intéresse aussi aux applications des mathématiques : analyse d'images, finance, technologie de l'information. Il a écrit une soixantaine d'articles dans des revues et des conférences internationales. Ses travaux lui ont valu plusieurs invitations dans des universités étrangères.

Alain FAISANT est maître de conférence hors classe émérite à l'Université de Saint-Étienne, où s'est déroulée la majeure partie de sa carrière. Ses travaux sont principalement centrés sur la théorie des nombres et il est l'auteur d'un ouvrage qui fait référence sur le sujet : " L'équation diophantienne du second degré " (Hermann 1991). Ses travaux portent aussi sur la théorie des graphes, plus précisément sur leurs aspects algébriques et topologiques. Plus récemment, il s'est intéressé aux mathématiques babyloniennes, ce qui lui a valu une invitation par les autorités kurdes d'Irak.

François HENNECART est professeur à l'Université de Saint-Étienne depuis 2003. Il y enseigne les mathématiques et y développe ses recherches en théorie des nombres. Il s'intéresse plus particulièrement à des problèmes additifs et combinatoires, domaines où les graphes interviennent fréquemment. Il a publié une trentaine d'articles dans les meilleures revues du domaine. Il a été chercheur invité à l'Institut Rényi de Hongrie ainsi qu'à l'Académie slovaque des Sciences à Bratislava. Anciennement rédacteur en chef du *Journal de théorie des nombres de Bordeaux* (1997-2003) François HENNECART donne souvent des conférences en France, notamment à l'IHP.

Sommaire

Avant-propos	vii
À propos des auteurs	xiii
1 Concepts fondamentaux	1
1.1 Graphes non orientés	1
1.1.1 Degré	6
1.1.2 Chaîne et cycle	7
1.1.3 Sous-graphes	9
1.2 Décomposition connexe	13
1.3 Graphes orientés	14
1.4 Graphes simples	17
1.5 Opérations sur les graphes	20
1.6 Représentations algorithmiques des graphes	20
1.7 Algorithmes et théorie de la complexité	22
1.7.1 Algorithme	22
1.7.2 Complexité en temps d'un algorithme	24
1.7.3 Classes de complexité	25
1.8 Définition d'un graphe à partir de la fonction d'incidence	26
1.9 Isomorphismes de graphes. Groupes d'automorphismes . .	27
1.10 Compléments : quelques structures de base	32
2 Quelques graphes remarquables	35
2.1 Graphes bipartis	35
2.2 Arbres et arborescences	39
2.2.1 Arbres	39
2.2.2 Arborescences	45
2.3 Digraphes sans circuit	48
2.4 Graphes eulériens et graphes hamiltoniens	50

2.4.1	Graphes eulériens	50
2.4.2	Graphes hamiltoniens	55
3	(Di)graphes et structures de données	61
3.1	Arbres et arborescences : le retour	62
3.1.1	Représentation d'un arbre ou d'une arborescence sous forme fils-frère	63
3.1.2	Arbres et arborescences binaires	67
3.1.3	Arbres et arborescences binaires de recherche	68
3.1.4	Arbres et arborescences de priorité, les tas	74
3.1.5	Arbres AVL	79
3.1.6	Propriétés des arbres binaires	84
3.2	Complexité en temps des algorithmes sur les arbres binaires	85
3.3	Graphes : le retour	87
3.3.1	Représentation par matrice d'adjacence	87
3.3.2	Représentation par tableau des listes de successeurs	87
3.3.3	Remarques sur la complexité de ces représentations	88
3.3.4	Parcours d'un (di)graphe	88
3.4	Compléments	91
3.4.1	Types de données simples	91
3.4.2	Fonctions	92
3.4.3	Passage des paramètres dans une fonction	93
3.4.4	Structures linéaires	94
4	Connexité et flots dans les réseaux	99
4.1	Sommet-connexité et arête-connexité	99
4.2	Graphes 2-sommet-connexes	103
4.3	Graphes 2-arête-connexes	111
4.4	Flots dans un réseau	113
4.4.1	Définitions	113
4.4.2	Le théorème de FORD et FULKERSON	117
4.5	Applications des flots dans un réseau	123
4.6	Compléments : lois de KIRCHHOFF	128
5	Graphes planaires	131
5.1	Dessins	131
5.2	Graphes planaires	133
5.2.1	Rappels de topologie de $\mathbb{R}^n$	133
5.2.2	Lignes polygonales	134
5.2.3	Graphes plongés	144

5.2.4	Faces	145
5.2.5	La formule d'EULER	148
5.2.6	Graphes planaires 2-connexes	154
5.3	Comparaison des plongements	155
5.4	Le théorème de KURATOWSKI	158
5.5	Graphe dual	161
5.6	Croisements, épaisseur et genre d'un graphe	165
5.6.1	Croisements et épaisseur	165
5.6.2	Genre d'un graphe	166
5.7	Compléments de topologie et géométrie du plan	171
5.7.1	Éléments de topologie	171
5.7.2	Preuve du théorème de JORDAN « polygonal »	175
6	Théorie algébrique	183
6.1	Matrices et graphes	183
6.1.1	Le cas orienté	190
6.1.2	Le cas non orienté	191
6.2	Espaces vectoriels et graphes	192
6.2.1	Cas des graphes orientés	192
6.2.2	Cas des graphes non orientés	196
6.3	Circulation et algèbre linéaire	198
6.4	Graphes planaires et algèbre linéaire	202
6.5	Compléments d'algèbre linéaire	206
6.5.1	Espaces vectoriels	206
6.5.2	Matrices	208
6.5.3	Produits scalaires	211
7	Coloration	213
7.1	Coloration des sommets	214
7.1.1	Propriétés générales	214
7.1.2	Le théorème de BROOKS	219
7.2	Graphes planaires et cartes	222
7.3	Coloration des arêtes	227
7.4	Morphismes de graphes	232
7.4.1	Quotients de graphe	235
7.4.2	Morphismes et quotients de graphes simples	236
7.4.3	Morphismes et coloration	236
7.5	Graphes parfaits	238
7.6	Coloration par listes	242

8	Couplage et factorisation	245
8.1	Définitions et premières propriétés	245
8.2	Couplages dans les graphes bipartis	252
8.2.1	Le théorème de HALL	252
8.2.2	Réseau associé à un graphe biparti	254
8.2.3	Remarques algorithmiques	255
8.3	Couplages dans les graphes quelconques	256
8.4	Factorisation	263
8.5	Quelques applications des couplages	266
8.6	Généralisation de la notion de facteur	274
9	Automorphismes – Théorie spectrale	277
9.1	Groupes de permutations	277
9.2	Groupes d'automorphismes d'un graphe et line-graphe . .	279
9.2.1	Automorphismes, automorphismes d'arêtes	279
9.2.2	Étude de $\text{Ker } \alpha_\Gamma$	283
9.2.3	Étude de $\text{Im } \alpha_\Gamma$	283
9.3	Graphe de CAYLEY colorié	287
9.4	Le problème de KÖNIG	290
9.5	Action de groupe	294
9.6	Graphes transitifs	298
9.7	Théorie spectrale des graphes	300
9.7.1	L'espace hermitien $\mathbb{C}^n$	301
9.7.2	Spectre d'un graphe	304
9.7.3	Laplacien d'un graphe	313
9.8	Polynôme chromatique	321
10	Autres perspectives	327
10.1	Polynômes de TUTTE	327
10.1.1	Propriétés de base	329
10.1.2	Polynôme de TUTTE et polynôme chromatique . .	336
10.1.3	Polynôme de TUTTE et arbres de recouvrement . .	338
10.1.4	Polynôme de TUTTE et planarité	339
10.1.5	Autres applications	339
10.2	Théorie de RAMSEY	340
10.3	Matroïdes	347
10.4	Hypergraphes	353

Bibliographie	357
Index	359
Symboles utilisés	367

Chapitre 1

Concepts fondamentaux

Nous donnons dans ce chapitre les principales définitions de la théorie des graphes. Celles-ci, bien que formalisées de manière abstraite, sont heureusement très intuitives et donc simples à comprendre. Nous avons également introduit quelques notions sur les algorithmes. En effet, de nombreuses propriétés des graphes peuvent être traduites de manière algorithmique. Certaines propriétés ne sont pas effectives (voir section 1.7.3). D'autres, comme le problème d'isomorphisme de graphes, sont très importantes en théorie de la complexité. Ainsi avons-nous aussi développé à la fin du chapitre quelques éléments sur les classes de complexité.

1.1 Graphes non orientés

La notion de graphe est sujette à de nombreuses variations car un graphe « code » deux informations : l'information donnée par les sommets et celle représentée par les arêtes entre deux sommets (voir l'exemple en figure 1.1) ; par conséquent on a besoin de nommer les sommets puis de nommer les arêtes. Cependant cela ne suffit pas car on peut avoir plusieurs arêtes entre deux sommets (voir l'exemple en figure 1.2).

On aura donc besoin d'un troisième ensemble pour tenir compte de la multiplicité éventuelle des arêtes. Aussi convient-il de préciser soigneusement les définitions. Voici d'abord une première description, abstraite, des graphes. Nous en donnerons une autre à la fin de ce chapitre.

Si V est un ensemble, on note $P_2(V)$ l'ensemble des parties de V à 1 ou 2 éléments ($\{x\}$ ou $\{x, y\}$).

Convention : on notera $[x, y]$ pour englober les 2 cas $x = y$ et $x \neq y$.

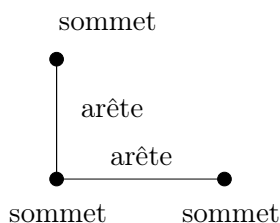


Figure 1.1 – Exemple de graphe : une arête est représentée par une « courbe » entre deux sommets.

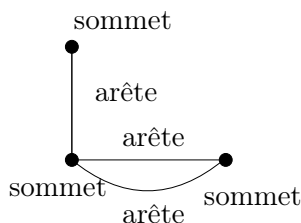


Figure 1.2 – Exemple de graphe avec une « arête multiple ».

On a toujours $[x, y] = [y, x]$. On peut donc voir $[x, y]$ comme un multi-ensemble comportant deux termes.

Un **graphe** est un triplet $\Gamma = (V; E, N)$ où

- V est l'ensemble des **sommets** du graphe ; il sera commode d'utiliser la notation $V(\Gamma)$ pour désigner l'ensemble des sommets du graphe Γ ;
- N est un ensemble qui sert à étiqueter les arêtes (par exemple $N = \{1, 2, \dots, p\}$, $N = \{\text{bleu, rouge, vert, } \dots, \text{violet}\}$, $N = \mathbb{N} \dots$) ;
- $E \subset P_2(V) \times N$ est l'ensemble des **arêtes** ; notation $E = E(\Gamma)$.

Une arête $a \in E$ s'écrit $a = ([x, y], n)$, $x, y \in V$, $n \in N$; x et y sont les **extrémités** de a et n son étiquette ; a est **incidente** à x et y ; x et y sont dits **adjacents** ; si $x = y$, l'arête est une **boucle**.

Restriction : dans les graphes que nous considérerons, on supposera que pour tous $x, y \in V$ l'ensemble $\{a \in E : x \text{ et } y \text{ incidents à } a\}$ est fini.

Pour **représenter** un graphe dans le plan ou dans l'espace, on matérialise généralement les arêtes par des segments ou des courbes.

Deux arêtes a et b sont **adjacentes** si elles ont (au moins) une extrémité commune.

La **fonction d'incidence** $\varepsilon : E \longrightarrow P_2(V)$ est définie par $\varepsilon(a) = [x, y]$ si $a = ([x, y], n)$.

Pour x, y fixés dans V l'ensemble $\{a \in E, \varepsilon(a) = [x, y]\}$, de cardinal $p \geq 1$, est appelé **p -arête** ; c'est l'ensemble

$$\{([x, y], n_1), ([x, y], n_2), \dots, ([x, y], n_p)\},$$

où $n_i \in N$, $i = 1, \dots, p$, sont les étiquettes de la p -arête. Si $p = 1$, on l'appelle également arête **simple** et on le note simplement $\{x, y\}$; tandis que si $p \geq 2$, on dit que c'est une **multi-arête** ou une arête **multiple**. Une p -boucle est une p -arête dont les extrémités coïncident.

On prendra garde à bien distinguer la notion d'arête de celle de multi-arête, dans le sens où une multi-arête est généralement constituée de plusieurs arêtes.

Exemple 1.1.1. Considérons le graphe de la figure 1.3. On a :

$$\begin{aligned} V &= \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_6\}, & N &= \{1, 2, \dots, 9\}, \\ E &= \{([x_1, x_2], 1), ([x_1, x_2], 2), ([x_2, x_3], 3), ([x_2, x_3], 1), ([x_2, x_3], 4), \\ &\quad ([x_3, x_5], 5), ([x_3, x_4], 1), ([x_4, x_5], 6), ([x_4, x_4], 7), ([x_4, x_4], 8), \\ &\quad ([x_5, x_6], 9), ([x_5, x_6], 5)\}. \end{aligned}$$

On remarque que les étiquettes peuvent être répétées ; ainsi les arêtes $([x_1, x_2], 1)$ et $([x_2, x_3], 1)$ sont distinguées, non pas par leur étiquette, mais par le fait que $x_3 \neq x_1$. Ce graphe contient une 2-boucle (c'est-à-dire une 2-arête dont les extrémités coïncident), une 3-arête, deux 2-arêtes, les autres sont des arêtes simples.

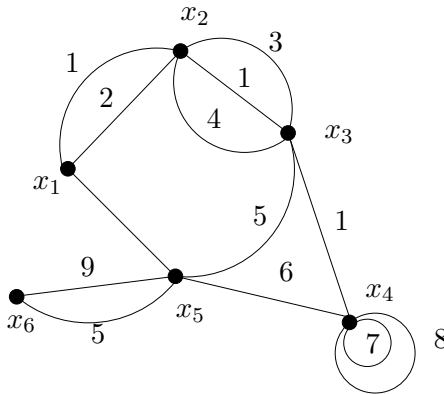


Figure 1.3 – Exemple de graphe comportant des multi-arêtes et une 2-boucle.

Exemple 1.1.2. Les graphes, lorsqu'ils sont associés à une représentation dans le plan ou dans l'espace permettent de modéliser des informations concrètes. C'est le cas du graphe de la figure 1.4 dont on se sert pour représenter des moyens de transport entre différentes villes représentés par un graphe « concret ». On a : $N = \{\text{avion}, \text{route}, \text{tgv}, \text{train}\}$.

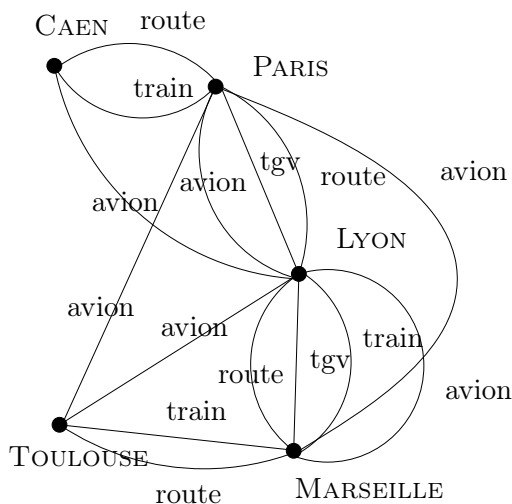


Figure 1.4 – Un graphe concret.

Autres exemples de graphes :

- 1) L'ensemble des sommets est l'ensemble des aéroports du monde ; les étiquettes de N sont l'ensemble des compagnies aériennes : $\{\text{Airfrance}, \text{Americanairlines} \dots\}$. Un élément $a \in E$ est une ligne aérienne entre deux aéroports desservis par une compagnie aérienne, par exemple : $a = ([\text{Paris}, \text{New-York}], \text{Airfrance})$.
- 2) L'ensemble des sommets est l'ensemble des localités françaises, les étiquettes de N sont l'ensemble des routes départementales, routes nationales, autoroutes. . . Un élément $a \in E$ est une voie de circulation entre deux localités, par exemple

$$a = ([\text{Paris}, \text{Lyon}], \text{Autoroute A6}).$$

Lorsque le graphe Γ n'a pas de boucle et ne possède que des arêtes simples, on dit que Γ est un **graphe simple** (voir section 1.4). La figure 1.5 montre un graphe simple. Dans ce cas, une arête ayant comme extrémités x et y sera notée simplement $a = \{x, y\}$.

L'**ordre** d'un graphe est son nombre de sommets ; pour un graphe d'ordre fini, le nombre d'arêtes est aussi fini car, par hypothèse, le nombre d'arêtes incidentes en un sommet donné est supposé fini ; si $V = \emptyset$, le graphe est appelé graphe **nul**. **La plupart des graphes étudiés dans ce livre ne sont pas nuls !**

Dans de nombreux problèmes impliquant des graphes, il n'est pas nécessaire de désigner explicitement les sommets et les étiquettes des arêtes par des noms, la représentation du graphe se limitant ainsi à des points (les sommets) reliés éventuellement par des segments ou bien des courbes (arêtes).

Exemple 1.1.3. Nous avons représenté une molécule de propane en figure 1.5. Les sommets sont les atomes de carbone ou d'hydrogène, les arêtes sont les liaisons covalentes entre ces atomes. La molécule de propane C_3H_8 est d'abord représentée à travers un graphe « concret ». Dans le deuxième schéma, celle-ci est modélisée en ne conservant que la stricte information nécessaire. Ce graphe est simple et son ordre est égal à 11.

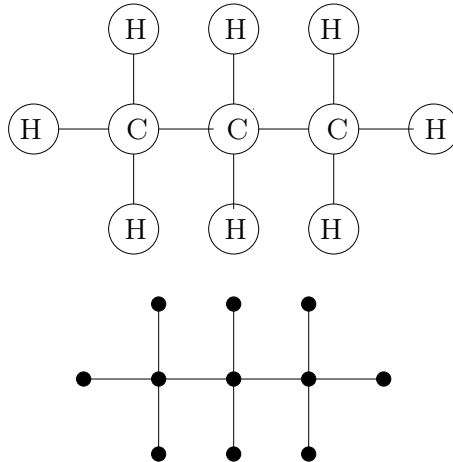


Figure 1.5 – Graphes représentant la molécule de propane C_3H_8 .

1.1.1 Degré

Le **degré** d'un sommet $x \in V$ est le nombre d'arêtes incidentes à x : une boucle incidente à x contribue, *par définition*, deux fois dans le calcul du degré de x . Le degré de x sera noté $d_\Gamma(x)$ ou simplement $d(x)$ et il correspond donc au nombre d'occurrences du sommet x comme extrémité d'arêtes $a \in E$:

$$d(x) = |\{a \in E : \exists y \neq x \text{ tel que } \varepsilon(a) = [x, y]\}| \\ + 2|\{a \in E : \varepsilon(a) = [x, x]\}|,$$

où $|X|$ désigne le cardinal de X .

Lorsque Γ est un graphe simple, le degré d'un sommet x est égal au nombre de sommets adjacents à x .

Un sommet de degré 1 est appelé **sommet pendent** et une arête incidente à un sommet de degré 1 est appelée **arête pendante**.

Le **degré minimum** d'un graphe Γ est $\delta(\Gamma) = \min\{d(y), y \in V\}$, son **degré maximum** est $\Delta(\Gamma) = \max\{d(y), y \in V\}$. Son **degré moyen** est défini, si $V \neq \emptyset$, par le nombre :

$$d(\Gamma) = \frac{1}{|V|} \sum_{x \in V} d(x).$$

Un graphe est **régulier** si tous ses sommets ont le même degré, c'est-à-dire $\delta(\Gamma) = \Delta(\Gamma) = k$: on dit alors que le graphe est **régulier de degré k** ou **k -régulier**.

La **distribution des degrés** de Γ est la suite (avec répétition si nécessaire) des degrés rangés dans l'ordre croissant.

Un sommet est **isolé** si son degré est zéro ; une p -boucle d'extrémité x est dite **isolée** s'il n'existe pas d'autre arête incidente à x .

Soit x un sommet d'un graphe Γ ; on note $\Gamma(x)$ l'ensemble des sommets **différents** de x adjacents à x ; $\Gamma(x)$ est appelé le **voisinage** de x et ses éléments sont les **voisins** de x . Plus généralement si $X \subset V$, le voisinage de X est $\Gamma(X) = \bigcup_{x \in X} \Gamma(x) \setminus X$.

Exemple 1.1.4. Le graphe de la figure 1.6 est de degré maximum $\Delta(\Gamma) = 5$, de degré minimum $\delta(\Gamma) = 3$, sa distribution des degrés est $(3, 3, 3, 3, 3, 5)$; son degré moyen est égal à $10/3$.

1.1.2 Chaîne et cycle

Soit un graphe $\Gamma = (V; E, N)$ et $x, y \in V$; une **chaîne** C de x à y est une succession finie d'arêtes du type

$$([x, x_1], n_0); ([x_1, x_2], n_1); \dots; ([x_i, x_{i+1}], n_i); \dots; ([x_{k-1}, y], n_{k-1}).$$

Intuitivement, une chaîne de x à y permet de joindre y à partir de x en parcourant sans saut différentes arêtes de Γ . Les sommets x et y sont les extrémités de la chaîne C . Pour alléger les notations, on pourra écrire simplement

$$C = (x, n_0, x_1, n_1, x_2, \dots, x_{k-1}, n_{k-1}, y).$$

Le nombre k est la **longueur** de la chaîne C .

Il est clair qu'une chaîne de x à y induit une chaîne de y à x . Les arêtes du graphe n'étant pas orientées, on identifiera naturellement ces deux chaînes. On dira que C est une chaîne entre x et y . Soient C_1 une chaîne entre x et y et C_2 une chaîne entre y et z ; on peut concevoir une opération de « collage » de ces deux chaînes en y qui induit une nouvelle chaîne C_3 entre x et z . Cette opération est appelée **concaténation**. Naturellement la concaténation de deux chaînes ne peut avoir lieu que si les chaînes ont au moins une extrémité commune. Par exemple, en figure 1.4, on part de TOULOUSE pour se rendre à CAEN; on a une première chaîne, réduite à une arête (TOULOUSE, avion, LYON) et une seconde chaîne (LYON, tgv, PARIS, train, CAEN), que l'on peut concaténer en une chaîne de TOULOUSE à CAEN.

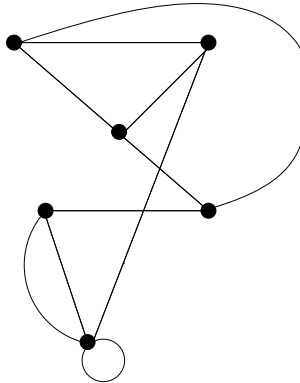


Figure 1.6 – Différentes notions de degrés dans un graphe (voir exemple 1.1.4).

Une chaîne est **simple** si elle ne contient pas deux fois une même arête. Elle est **élémentaire** si elle ne contient pas deux fois un même sommet. Notons que toute chaîne élémentaire est a fortiori simple :

$$\text{élémentaire} \begin{array}{c} \implies \\ \nleftarrow \end{array} \text{simple.}$$

Une chaîne est dite **fermée** si ses deux extrémités coïncident. Lorsque c'est le cas, tout sommet de la chaîne peut être considéré comme son extrémité.

Un **cycle** est une chaîne fermée **simple** ; en fait un cycle n'a « ni queue ni tête », la numérotation est une simple commodité. La longueur d'un cycle est le nombre d'arêtes qui le composent ; une boucle est un cycle de longueur 1.

Une **corde** dans un cycle est une arête reliant deux sommets non consécutifs dans ce cycle. Un graphe sans cycle est aussi appelé **acyclic**.

Un graphe est dit **connexe** si pour toute paire de sommets $x, y \in V$, il existe une chaîne entre x et y : on dit alors que les sommets x et y sont **connectés**. Les définitions précédentes sont illustrées en figure 1.7.

Exemple 1.1.5. Dans le graphe de la figure 1.7, on a matérialisé les arêtes $([x_i, x_j], n_k)$ par des courbes ; ce graphe a deux composantes connexes ; on a la chaîne : $(x_1, 1, x_2, 1, x_2, 1, x_4, 2, x_5, 1, x_4, 2, x_5, 2, x_6)$ entre x_1 et x_6 . Mais nous avons aussi $(x_1, 2, x_4, 1, x_3, 2, x_2, 1, x_4, 2, x_5, 3, x_6)$ qui est une chaîne simple mais non élémentaire. En revanche, la chaîne $(x_1, 1, x_2, 1, x_4, 1, x_5, 1, x_6)$ est élémentaire donc simple.

La chaîne $(x_7, 1, x_8, 3, x_9, 2, x_8)$ est simple non élémentaire. Le degré du sommet x_2 est égal à 6.

La distribution des degrés est $(2, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6)$ et le degré moyen est égal à $\frac{36}{9}$.

La longueur de la chaîne la plus courte entre x_1 et x_6 est égale à 3 (on verra au paragraphe suivant que cela signifie que la distance entre x_1 et x_6 est égale à 3).

Exercice 1.1. Soit Γ un graphe connexe. Montrer qu'il existe une chaîne entre deux sommets distincts si et seulement s'il existe une chaîne élémentaire entre ces deux sommets.

Indication : on raisonnera par récurrence sur le nombre de sommets de la chaîne en considérant l'avant-dernier sommet.

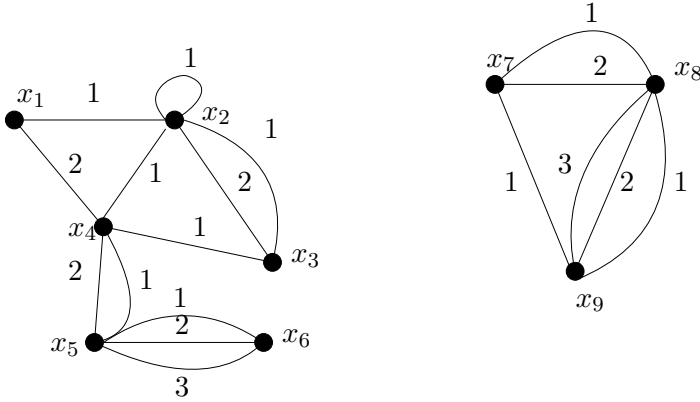


Figure 1.7 – Exemple de graphe comportant deux composantes connexes.

Remarque 1.1.6. La relation définie par xRy si et seulement si $x = y$ ou bien il existe une chaîne entre x et y est une relation d'équivalence sur V ; les classes d'équivalences modulo R sont appelées **composantes connexes** du graphe. Un graphe connexe ne possède donc qu'une composante connexe.

1.1.3 Sous-graphes

Les notions suivantes sont illustrées dans les figures 1.8 et 1.9. Un graphe $\Gamma' = (V'; E', N')$ est appelé **sous-graphe** de Γ si $V' \subset V$, $E' \subset E$ (donc nécessairement $N' \subset N$). En fait, ces conditions imposent que $E' \subset E \cap (P_2(V') \times N')$ car Γ' est un graphe.

Lorsque $V' = V$, on dit que Γ' est un **graphe partiel** de Γ . Par exemple le graphe Γ privé d'une arête a , noté $\Gamma \setminus a$, est un graphe partiel.

Lorsque $E' = \{a \in E, \varepsilon(a) \in P_2(V')\}$, c'est-à-dire qu'on a gardé toutes les arêtes de Γ entre les sommets de V' , on dit que Γ' est le **sous-graphe induit** par V' ou sur V' , ce que l'on note $\Gamma' = \Gamma(V')$. Le contexte permettra de distinguer la notion de voisinage $\Gamma(X)$ de celle de graphe induit. Pour $x \in V$, $\Gamma - x$ désigne le sous-graphe induit par $V \setminus \{x\}$.

Le graphe partiel engendré par E' est le graphe $\Gamma(E') = (V; E', N)$.

Remarque 1.1.7. La donnée de V' et E' ne suffit pas toujours à faire un sous-graphe : ainsi si $V = \{x, y\}$, $E = \{\{x, y\}\}$, $N = \{1\}$, $V' = \{x\}$, alors

le triplet $(V'; E, N)$ n'est pas un graphe donc ne correspond a fortiori à aucun sous-graphe de $\Gamma = (V; E, N)$.

Un graphe simple est dit **complet** s'il a une arête entre toute paire de sommets. On note K_n le graphe complet d'ordre n .

Une **clique** dans un graphe Γ est un sous-graphe complet de Γ . L'ordre maximal d'une clique dans Γ est noté $\omega(\Gamma)$.

Dans un graphe connexe $\Gamma = (V; E, N)$, une arête a est un **pont** ou un **isthme** si le graphe $\Gamma \setminus a$ n'est plus connexe. Plus généralement a est un isthme de Γ si $\Gamma \setminus a$ a au moins une composante connexe de plus que Γ .

Le **graphe sous-jacent** à une chaîne est le graphe dont les sommets et les arêtes sont ceux et celles de la chaîne (on ne répète pas les sommets et les arêtes qui seraient traversés plusieurs fois par la chaîne).

Exemple 1.1.8. Le graphe de la figure 1.8 est simple et connexe ; l'arête $\{x_1; x_9\}$ est un isthme. Les sommets x_2, x_3, x_4 forment un **triangle**, c'est-à-dire une clique d'ordre 3.

Exercice 1.2. Montrer qu'en réalité la suppression d'un isthme dans un graphe d'ordre fini augmente le nombre de composantes connexes d'une unité.

Lemme 1.1.9. Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe d'ordre fini.

i) La somme des degrés est égale à deux fois le nombre d'arêtes :

$$\sum_{x \in V} d(x) = 2|E|.$$

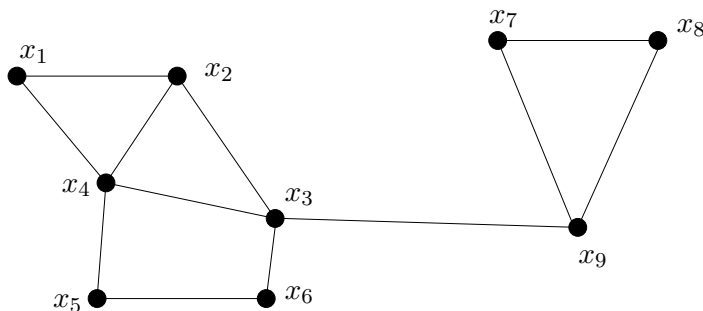


Figure 1.8 – Isthme et clique dans un graphe (voir exemple 1.1.8).

ii) *Le nombre de sommets de degré impair est pair.*

Démonstration. Exercice : raisonner par récurrence sur $|E|$. □

Le lemme précédent est parfois appelé **lemme des poignées de main**.

Exemple 1.1.10. Les sommets de x_2 à x_9 ainsi que les arêtes en gras forment un sous-graphe du graphe de la figure 1.7. Les sommets de x_1 à x_9 et les arêtes fines forment un graphe partiel du même graphe.

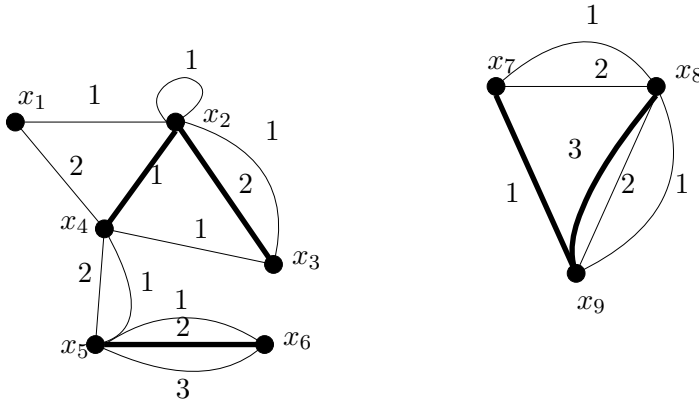


Figure 1.9 – Sous-graphe et graphe partiel.

Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe connexe ; on définit la **distance** entre deux sommets x et y par :

- $d(x, y)$ est la plus petite longueur de chaîne entre x et y si $x \neq y$;
- $d(x, x) = 0$.

Exercice 1.3. Montrer que (V, d) est un espace métrique (voir § 1.10).

Il peut être commode de généraliser cette distance à des graphes Γ qui ne sont pas nécessairement connexes en posant $d(x, y) = +\infty$ si x et y ne sont pas dans une même composante connexe de Γ .

Le **diamètre** d'un graphe $\Gamma = (V; E, N)$ est défini par

$$\text{diam}(\Gamma) = \sup\{d(x, y), x, y \in V\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}.$$

L'**excentricité** d'un sommet x est :

$$\text{ex}(x) = \sup\{d(x, y), y \in V\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}.$$

Un sommet est **central** dans Γ s'il a une excentricité minimum : $\text{ex}(x) \leq \text{ex}(y)$ pour tout $y \in V$.

On définit également, pour un graphe simple, la **maille** $\mu(\Gamma)$ (en anglais *girth*) comme étant la longueur du plus petit cycle ($\mu(\Gamma) = +\infty$ si le graphe n'a pas de cycle).

Exemple 1.1.11. Le graphe de la figure 1.10 est simple et connexe, son diamètre est égal à 3; sa maille est égale à 4; l'excentricité du sommet x est égale à 3.

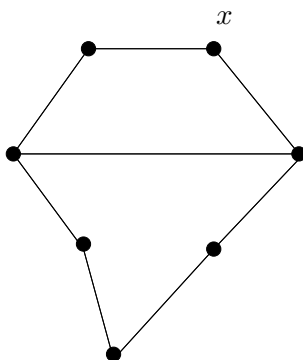


Figure 1.10 – Diamètre et excentricité.

Exemple 1.1.12. Le *Rubik's cube* est une illustration spectaculaire du diamètre : on représente le problème par un graphe dont les sommets sont les $8!3^712!2^{10}$ (soit environ $4,3 \cdot 10^{19}$) configurations du *Rubik's cube*; une arête entre deux configurations x et y signifie qu'on passe de x à y par un « mouvement »; il y a 18 mouvements ainsi décrits : au centre de chacune des 6 faces se trouve un cube fixe (donnant la couleur de la face); il y a 3 rotations de la face autour de ce cube, d'angles $\pi/2$, π et $3\pi/2$, d'où $3 \times 6 = 18$ mouvements : le graphe ainsi construit est régulier de degré 18.

Par des considérations algorithmiques sophistiquées, ROKICKI, KO-CIEMBA, DAVIDSON et DETHRIDGE ont montré (juillet 2010) que le diamètre de ce graphe est 20 : cela signifie qu'à partir de n'importe quelle configuration on peut retrouver le cube ayant chaque face unicolore en au plus 20 mouvements ! Il reste maintenant à trouver une preuve mathématique de ce fait !

Proposition 1.1.13. *Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe, alors sa maille vérifie :*

$$\mu(\Gamma) \leq 2 \cdot \text{diam}(\Gamma) + 1.$$

Démonstration. Soit C un cycle de Γ ayant pour longueur $\mu(\Gamma)$. Raisonnons par l'absurde.

Si $\mu(\Gamma) \geq 2 \cdot \text{diam}(\Gamma) + 2$ alors C a deux sommets, x, y dont la distance dans le sous-graphe induit par les sommets de C est au moins égale à $\text{diam}(\Gamma) + 1$. Comme C est un cycle de longueur minimum, la distance de x à y dans Γ est la même que dans C : mais alors $d(x, y) > \text{diam}(\Gamma)$, ce qui est absurde. $\square$

Remarque 1.1.14. On notera l'analogie avec la relation $C = \pi D$ reliant la circonférence C (correspondant à la maille) au diamètre D d'un cercle.

Les notions de diamètre, de plus petit cycle, d'excentricité... , sont capitales dans l'étude des réseaux. On en trouve des applications notamment dans les réseaux de télécommunications.

1.2 Décomposition connexe

Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe et soit $(V_\alpha)_{\alpha \in L}$ la famille des composantes connexes de Γ (classes d'équivalence de R , voir section 1.1.2, remarque 1.1.6). On note $\Gamma_\alpha = (V_\alpha; E_\alpha, N_\alpha)$ le sous-graphe induit par V_α .

Lemme 1.2.1. *On a*

- i) *Pour tout $\alpha \in L$, Γ_α est connexe.*
- ii) *Si $\Gamma' = (V'; E', N')$ est un sous graphe connexe de Γ , alors il existe $\alpha \in L$ tel que $V' \subset V_\alpha$.*
- iii) *Si $\alpha, \beta \in L$, $\alpha \neq \beta$, alors aucun sommet de V_α n'est adjacent à un sommet de V_β ; donc $E = \sqcup_{\alpha \in L} E_\alpha$ (où $\sqcup$ représente l'union disjointe).*

Démonstration. i) Par définition de la connexité.

ii) Supposons $V' \neq \emptyset$: soient $x \in V'$ et V_α la composante connexe contenant x ; pour tout $y \in V'$, il existe une chaîne entre x et y dans $\Gamma(V')$ et donc a fortiori dans Γ_α , ce qui entraîne $V' \subset V_\alpha$.

iii) Soient $x \in V_\alpha$ et $y \in V_\beta$. Il n'y a pas de chaîne entre x et y , donc a fortiori pas d'arête. $\square$

Corollaire 1.2.2. Soient $\Gamma_i = (V_i; E_i, N_i)$, $i = 1, 2$, deux sous-graphes connexes d'un graphe Γ . Si Γ_1 et Γ_2 se « coupent », en ce sens que $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$, alors $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = (V_1 \cup V_2; E_1 \cup E_2, N_1 \cup N_2)$ est connexe.

Démonstration. Exercice. □

1.3 Graphes orientés

Un **graphe orienté** ou **digraphe** $\vec{\Gamma}$ (ou simplement Γ) est un triplet $\vec{\Gamma} = (V; \vec{E}, N)$ défini de la manière suivante :

- V est l'ensemble des **sommets** ; notation $V = V(\vec{\Gamma})$;
- $\vec{E} \subset V \times V \times N$ est l'ensemble des **arcs** ; notation $\vec{E} = \vec{E}(\Gamma)$;
- N est un ensemble servant à étiqueter les arcs.

Un arc $a \in \vec{E}$ sera noté $a = ((x, y), n)$: l'arc va de x vers y .

Dans la suite, on notera souvent Γ pour $\vec{\Gamma}$.

On utilise dans ce contexte deux **fonctions d'incidence** :

$$i : \vec{E} \longrightarrow V \quad \text{et} \quad t : \vec{E} \longrightarrow V$$

définies pour chaque $a = ((x, y), n)$ par :

$$\begin{aligned} i(a) &= x, \text{ le sommet } \mathbf{initial} \text{ de } a, \\ t(a) &= y, \text{ le sommet } \mathbf{terminal} \text{ de } a. \end{aligned}$$

Comme pour les graphes non orientés, on dit que l'arc a est **incident** à x et y et que y est **adjacent** à x . Une **boucle** est un arc a tel que $i(a) = t(a)$.

Pour $x, y \in V$ fixés, l'ensemble $\{a \in \vec{E}, i(a) = x, t(a) = y\}$ de cardinal p est appelé **p -arc** ; si $p = 1$, on parle d'**arc simple** ; si $p \geq 2$, c'est un **multi-arc**.

Soit $x \in V$. On définit

$$\begin{aligned} d^-(x) &= \text{card}\{a \in \vec{E}, t(a) = x\}, \quad \text{le } \mathbf{degré entrant} \text{ de } x, \\ d^+(x) &= \text{card}\{a \in \vec{E}, i(a) = x\}, \quad \text{le } \mathbf{degré sortant} \text{ de } x. \end{aligned}$$

Le **degré** de x est défini par $d(x) := d^-(x) + d^+(x)$. Si $d(x) = 0$, le sommet x est dit **isolé**.

Si $d^+(x) = 0$ et $d^-(x) > 0$, x est un **puits**.

Si $d^-(x) = 0$ et $d^+(x) > 0$, x est une **source**.

S'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout sommet x , on ait $d^+(x) = k$, le

digraphe est dit **semi-régulier sortant**. Si on a la propriété analogue pour les degrés entrants, le digraphe est **semi-régulier entrant**. Le digraphe est dit **régulier** s'il est à la fois semi-régulier entrant et semi-régulier sortant.

Lemme 1.3.1. Soit $\vec{\Gamma} = (V; \vec{E}, N)$ un digraphe d'ordre fini. Alors

$$\sum_{x \in V} d^+(x) = \sum_{x \in V} d^-(x) = |E|.$$

Démonstration. Exercice : raisonner par récurrence sur $|E|$. $\square$

Un **chemin** C de x à y est une suite finie de la forme :

$$C = (x, a_0, x_1, a_1, x_2, \dots, x_{k-1}, a_{k-1}, y)$$

où $k \geq 1$, $i(a_j) = x_j$ et $t(a_j) = x_{j+1}$, $0 \leq j \leq k-1$ (on a convenu que $x_0 = x$ et $x_k = y$) ; l'entier k est la **longueur du chemin**. Comme pour les graphes non orientés, on peut également définir un chemin grâce aux étiquettes de ses arcs :

$$C = (x, n_0, x_1, n_1, x_2, \dots, x_{k-1}, n_{k-1}, y),$$

où n_i est tel que $((x_i, x_{i+1}), n_i) \in \vec{E}$. S'il existe un chemin de x à y , on dira que y est **accessible** (à partir) de x .

Un chemin est **simple** s'il ne contient pas deux fois le même arc ; il est **élémentaire** s'il ne contient pas deux fois le même sommet.

Un **circuit** est un chemin *simple* dont les extrémités coïncident ; un digraphe est dit **sans circuit** s'il ne contient pas de circuit.

Un digraphe est **fortement connexe** si pour toute paire de sommets distincts x, y , il existe un chemin de x à y et un chemin de y à x .

Exemple 1.3.2. Dans le graphe de la figure 1.11, il existe un 2-arc entre x_2 et x_3 ; le sommet x_7 est une source et le sommet x_8 un puits. La partie gauche de ce digraphe est une composante fortement connexe, ce qui n'est pas le cas de l'autre partie. On remarquera qu'un digraphe (non nul) contenant une source ou un puits ne peut pas être fortement connexe. Le chemin $(x_1, n_1, x_4, n_1, x_2, n_1, x_1)$ est un circuit. Le degré entrant de x_2 est égal à 2 et son degré sortant à 4.

Exercice 1.4. Montrer que dans un digraphe $\vec{\Gamma} = (V; \vec{E}, N)$, la relation $\ll$ définie par

$$x \ll y \iff x = y \text{ ou il existe un chemin de } x \text{ à } y$$

est une relation de préordre sur V .

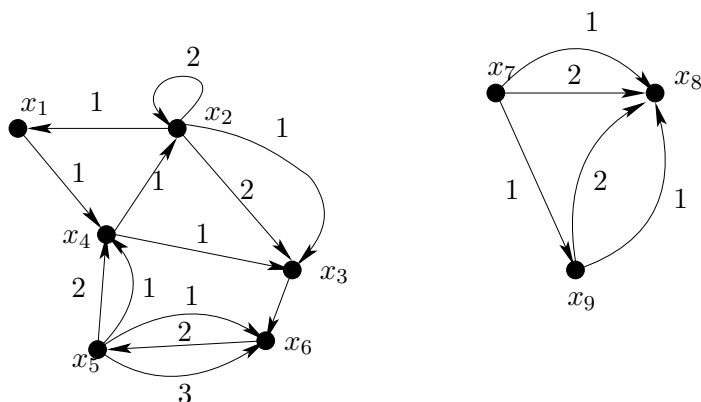


Figure 1.11 – Exemple de graphe orienté (non connexe).

Les classes d'équivalence de la relation binaire R associée au préordre $\ll$:

$$xRy \iff x \ll y \text{ et } y \ll x,$$

(le lecteur trouvera la définition d'un préordre au § 1.10) sont les **composantes fortement connexes** du graphe orienté $\vec{\Gamma}$.

Voici un petit tableau comparatif des vocabulaires correspondant aux graphes orientés et aux graphes non orientés :

Non orienté	Orienté
Arête	Arc
Chaîne	Chemin
Cycle	Circuit
Connexe	Fortement connexe

Le **graphe sous-jacent** d'un digraphe est le graphe obtenu en supprimant l'orientation des arcs : chaque arc $((x, y), n)$ est remplacé par l'arête correspondante $([x, y], n)$; en particulier, si $x = y$, la transformation donne une boucle.

De manière réciproque, sur tout graphe non orienté on peut attribuer une **orientation** à chaque arête en remplaçant l'arête $([x, y], n)$ par l'arc $((x, y), n)$, ou bien par l'arc $((y, x), n)$.

Un graphe connexe $\Gamma = (V; E; N)$ est un **graphe orientable**, s'il existe une orientation des arêtes de telle sorte que le graphe orienté obtenu, par orientation des arêtes, soit fortement connexe.

Théorème 1.3.3. *Un graphe connexe d'ordre fini Γ est orientable si et seulement si chaque arête est contenue dans au moins un cycle.*

Démonstration. La condition est clairement nécessaire.

Réciproquement, on peut supposer que le graphe est simple. On note Γ' un sous-graphe orientable maximal de Γ . On peut donc orienter les arêtes de Γ' de sorte qu'il soit fortement connexe. Si toutes les arêtes de Γ sont contenues dans Γ' , alors $\Gamma = \Gamma'$ est orientable. Sinon, le graphe étant connexe, on peut trouver une arête a_0 incidente à un sommet x_0 de Γ' ; par hypothèse, cette arête fait partie d'un cycle dans Γ ; il existe donc une chaîne $C = (x_0, a_0, x_1, a_1, x_2, \dots, a_{k-1}, x_k)$ partant de Γ' en x_0 et revenant pour la première fois sur Γ' en x_k . On oriente cette chaîne « linéairement » (il y a deux façons de le faire) en définissant les arcs $(x_0, x_1), \dots, (x_{k-1}, x_k)$; il s'ensuit facilement que $\Gamma' \cup C$ est fortement connexe, ce qui contredit la maximalité de Γ' . $\square$

Remarque 1.3.4. Ainsi la présence d'un isthme interdit l'orientabilité.

De façon analogue aux graphes, on peut définir une sorte de « distance » $d(x, y)$ sur un digraphe en considérant les chemins de plus courte longueur entre chaque couple (x, y) de sommets. Mais la propriété de symétrie habituellement attachée à une distance $d(x, y) = d(y, x)$ n'aura pas forcément lieu.

Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe (respectivement $\vec{\Gamma} = (V; \vec{E}, N)$ un digraphe); on appelle **valuation** ou **poids** des arêtes (respectivement des arcs) toute application $\omega : E$ (respectivement $\vec{E}$) $\rightarrow X$ de l'ensemble des arêtes (respectivement des arcs) dans un ensemble X (par exemple $X = \mathbb{R}$). Un graphe orienté muni d'une valuation donnera lieu à la notion de réseau (voir chapitre 4).

1.4 Graphes simples

Un graphe (respectivement un digraphe) est **simple** s'il ne contient pas de boucle ni de multi-arête (respectivement de multi-arc). Pour un graphe simple l'ensemble N est inutile, aussi on le note $\Gamma = (V; E)$ où $E \subset P_2(V)$ s'il est non orienté, $\vec{\Gamma} = (V; \vec{E})$ où $\vec{E} \subset V \times V$ s'il est orienté. On remarquera aussi que pour décrire une chaîne (respectivement un chemin), il suffit de donner la liste (respectivement la liste ordonnée) des sommets traversés.

Exercice 1.5.

- i) Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe simple ; montrer que la fonction d'incidence

$$\varepsilon : E \longrightarrow P_2(V)$$

est injective.

- ii) Soit $\vec{\Gamma} = (V; \vec{E})$ un graphe simple orienté ; montrer que

$$(i, t) : \vec{E} \longrightarrow V \times V$$

est injective.

Il est facile de vérifier qu'un graphe simple d'ordre n a au plus $\frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$ arêtes et qu'un digraphe simple d'ordre n a au plus $n(n-1)$ arcs (on note $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$, $0 \leq k \leq n$, les coefficients binomiaux).

Exercice 1.6.

- i) Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe simple d'ordre fini ; montrer que Γ est connexe si et seulement si pour toute partition de l'ensemble des sommets $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, il existe une arête a telle que $\varepsilon(a) \cap V_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2$.
- ii) Énoncer et démontrer un résultat analogue pour les graphes orientés.

Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe simple (non orienté) ; le **complémentaire** du graphe Γ est le graphe $\bar{\Gamma} = (\bar{V}, \bar{E})$ où $\bar{V} = V$ et $\bar{E} = P_2(V) \setminus E$.

Exercice 1.7. Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe simple. Démontrer que soit Γ est connexe, soit $\bar{\Gamma}$ est connexe.

Exemple 1.4.1. Dans la figure 1.12 figure la représentation d'un graphe et de son complémentaire.

Proposition 1.4.2. Soit $\Gamma = (V; E)$ (respectivement $\vec{\Gamma} = (V; \vec{E})$) un graphe (respectivement un digraphe) simple d'ordre n . Si Γ (respectivement $\vec{\Gamma}$) est connexe (respectivement fortement connexe), alors il a au moins $n-1$ arêtes (respectivement arcs). Le résultat est a fortiori vrai si Γ (respectivement $\vec{\Gamma}$) n'est pas simple.

Démonstration. On considère le cas des graphes. On raisonne par récurrence sur n ; si $n = 1$ ou $n = 2$, le résultat est trivial.

Supposons que l'assertion soit vraie jusqu'à $n-1$; soit Γ un graphe simple connexe d'ordre n et soit Γ' le sous-graphe induit obtenu en supprimant un sommet quelconque x . On considère les composantes connexes $\Gamma'_1, \dots, \Gamma'_k$ de Γ' ; pour chaque $i = 1, \dots, k$, le sous-graphe Γ'_i admet n_i sommets et on a $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n - 1$.

Par hypothèse de récurrence Γ'_i a au moins $n_i - 1$ arêtes.

Puisque Γ est connexe, le sommet x est nécessairement connecté à toutes les composantes connexes Γ'_i , par conséquent Γ contient au moins

$$n_1 - 1 + n_2 - 1 + \dots + n_k - 1 + k = n - 1 \quad \text{arêtes.}$$

Le cas des digraphes se démontre de la même façon. $\square$

Proposition 1.4.3. *Tout graphe $\Gamma = (V; E)$ acyclique d'ordre n admet au plus $n - 1$ arêtes.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur n ; si $n = 1$, on a $E = \emptyset$; si $n = 2$, il y a au plus une arête. Supposons le résultat vrai jusqu'à $n - 1$ et soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe acyclique d'ordre n ; on fixe une arête $a = \{x, y\}$ et on considère le graphe partiel $\Gamma' = (V; F)$ où $F = E \setminus \{a\}$; Γ' n'est pas connexe (car sinon on aurait une chaîne entre x et y dans Γ' ce qui fournirait naturellement un cycle dans Γ en refermant la chaîne avec l'arête a). Donc Γ' se décompose en $k \geq 2$ sous-graphes connexes (non nuls) $\Gamma'_i = (V_i, F_i)$, $1 \leq i \leq k$. Par hypothèse de récurrence, puisque $|F_i| < n$, on a $|F_i| \leq |V_i| - 1$, $1 \leq i \leq k$, d'où ($k \geq 2$)

$$|E| = 1 + \sum_{i=1}^k |F_i| \leq 1 + \sum_{i=1}^k (|V_i| - 1) = 1 + n - k \leq n - 1.$$

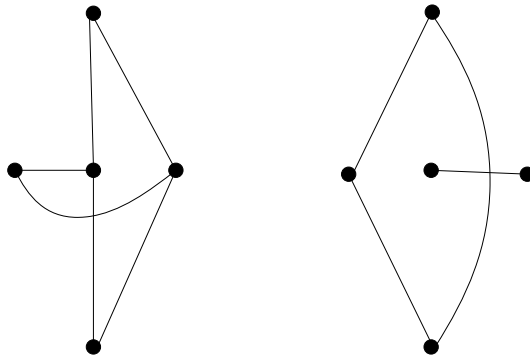


Figure 1.12 – Un graphe et son complémentaire.

1.5 Opérations sur les graphes

Soient $\Gamma_1 = (V_1; E_1, N_1)$ et $\Gamma_2 = (V_2; E_2, N_2)$ deux graphes, on suppose que 2 arêtes distinctes de $E_1 \cup E_2$ ont des étiquettes distinctes. On définit l'**union** de ces deux graphes par

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = (V_1 \cup V_2; E_1 \cup E_2, N_1 \cup N_2).$$

On notera $\Gamma_1 + \Gamma_2$ l'**union disjointe** des graphes Γ_i , $i = 1, 2$. Elle correspond au graphe $(V_1 \sqcup V_2; E_1 \sqcup E_2, N_1 \sqcup N_2)$ (réunions disjointes) : cela signifie ici que les sommets et les arêtes de Γ_1 et Γ_2 sont considérés comme distincts. Par exemple, lorsqu'on considère toutes les composantes connexes C_i , $1 \leq i \leq k$, d'un graphe Γ ayant un nombre fini de composantes connexes, on a naturellement $\Gamma = C_1 + C_2 + \dots + C_k$.

On définit l'**intersection** des deux graphes Γ_1 et Γ_2 par

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = (V_1 \cap V_2; E_1 \cap E_2, N_1 \cap N_2),$$

et la **différence** par

$$\Gamma_1 \setminus \Gamma_2 = (V_1 \setminus V_2; E_1 \setminus E_2, N_1 \setminus N_2).$$

On peut facilement étendre ces concepts aux digraphes.

1.6 Représentations algorithmiques des graphes

Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe (respectivement soit $\vec{\Gamma} = (V; \vec{E}, N)$ un digraphe) d'ordre fini, avec $V = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$.

Liste d'arêtes (respectivement liste d'arcs). On peut décrire Γ (respectivement $\vec{\Gamma}$) par n , son nombre de sommets, et ses arêtes (respectivement arcs) de la manière suivante : pour chaque paire (respectivement pour chaque couple) de sommets entre lesquels il y au moins une arête (respectivement un arc), on liste les étiquettes de ces arêtes (respectivement ces arcs). Une p -arête (respectivement un p -arc) entre x_i et x_j sera désignée par $(x_i, x_j; n_{i_1}, n_{i_2}, \dots, n_{i_p})$ si n_{i_j} est l'étiquette de l'arête a_{i_j} , (respectivement de l'arc) entre x_i et x_j (respectivement de x_i vers x_j). On regroupe dans A_{x_i} toutes les multi-arêtes (respectivement tous les multi-arcs) issues de x_i et écrites sous la forme précédente. On obtiendra donc la liste : $A_{x_1}; A_{x_2}; A_{x_3}; \dots; A_{x_n}$ (voir l'exemple 1.6.1 et la figure 1.13).

Liste de multiplicité. On peut aussi caractériser Γ (respectivement $\vec{\Gamma}$) d'une part par son nombre de sommets n et d'autre part par une liste d'ensembles $A_{x_1}; A_{x_2}; A_{x_3}; \dots; A_{x_n}$ de couples du type (x_j, p) où la première coordonnée d'un couple de A_{x_i} est un sommet x_j adjacent à x_i , la deuxième étant la multiplicité p de la multi-arête (respectivement du multi-arc) ayant pour extrémités x_i et x_j .

On remarquera qu'à travers ces deux représentations, certaines arêtes (respectivement certains arcs) sont répétées : cela peut être intéressant pour certaines applications. On peut cependant facilement supprimer les redondances.

Matrice d'adjacence. Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe (respectivement $\vec{\Gamma} = (V; \vec{E}, N)$ un digraphe) d'ordre fini, avec $V = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$. On peut représenter ce (di)graphe par une matrice carrée d'ordre n , $A = (\alpha_{i,j})$, à coefficients dans $\mathbb{N}$, où $\alpha_{i,j}$ est le nombre d'arêtes (ou d'arcs) entre x_i et x_j . Cette matrice est appelée **matrice d'adjacence** du graphe Γ (respectivement du digraphe $\vec{\Gamma}$).

Matrice d'incidence. Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe d'ordre fini. Si $|V| = n$, avec $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, et $|E| = m$, avec $E = \{a_1, \dots, a_m\}$, la **matrice d'incidence** de Γ est une matrice $n \times m$, $M = (\alpha_{i,j})$, à coefficients dans $\{0, 1\}$, définie par $\alpha_{i,j} = 1$ ou 0 selon que le sommet x_i est incident ou non à l'arête a_j . Dans le cas d'un digraphe $\vec{\Gamma} = (V; \vec{E}, N)$, la matrice d'incidence est une matrice $n \times m$, $M = (\alpha_{i,j})$ à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$, définie par $\alpha_{i,j} = -1$ si x_i est le sommet initial de l'arc a_j , $\alpha_{i,j} = 1$ si x_i est le sommet terminal de l'arc a_j , $\alpha_{i,j} = 0$ si x_i n'est pas incident à a_j .

Exemple 1.6.1. On considère le graphe Γ représenté en figure 1.13. Représentation de Γ par liste d'arêtes :

- le nombre de sommets est 6 ;
- $A_{x_1} = \{(x_1, x_2; n_1, n_2); (x_1, x_4; n_7); (x_1, x_5; n_6)\}$;
- $A_{x_2} = \{(x_2, x_3; n_3, n_4, n_5); (x_2, x_1; n_1, n_2)\}$;
- $A_{x_3} = \{(x_3, x_2; n_3, n_4, n_5); (x_3, x_5; n_9); (x_3, x_6; n_{11})\}$;
- $A_{x_4} = \{(x_4, x_1; n_7); (x_4, x_5; n_8)\}$;
- $A_{x_5} = \{(x_5, x_1; n_6); (x_5, x_3; n_9); (x_5, x_4; n_8); (x_5, x_6; n_{10})\}$;
- $A_{x_6} = \{(x_6, x_3; n_{11}); (x_6, x_5; n_{10})\}$.

Représentation Γ par liste de multiplicités :

- le nombre de sommets est 6 ;

- $A_{x_1} = \{(x_2, 2); (x_4, 1); (x_5, 1)\};$
- $A_{x_2} = \{(x_1, 2); (x_3, 3)\};$
- $A_{x_3} = \{(x_2, 3); (x_5, 1); (x_6, 1)\};$
- $A_{x_4} = \{(x_1, 1); (x_5, 1)\};$
- $A_{x_5} = \{(x_1, 1); (x_3, 1); (x_4, 1); (x_6, 1)\};$
- $A_{x_6} = \{(x_3, 1); (x_5, 1)\}.$

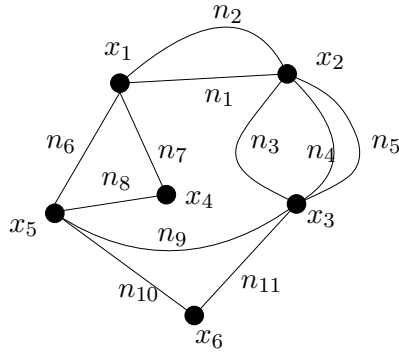


Figure 1.13 – Représentation d'un graphe par liste d'arêtes et par liste de multiplicités.

Exercice 1.8. Donner la matrice d'adjacence du graphe de la figure 1.13.

1.7 Algorithmes et théorie de la complexité

1.7.1 Algorithme

Un **algorithme** est une suite finie d'instructions finies. On trouve plusieurs types d'instructions.

Les affectations. On affecte une valeur aux variables et aux constantes par le symbole « = ». Exemples : $A = \emptyset$, $b = \text{true}$.

Les comparaisons. Pour comparer deux variables ou constantes, on utilise le symbole « == ».

Les conditionnels. Les conditionnels se présentent comme une structure bloc :

Si A Faire

$B_1; B_2; B_3; \dots; B_k;$

Sinon Faire $C_1; C_2; C_3; \dots; C_k;$ **Fin Si**

Interprétation : si la condition A est vraie, les opérations $B_1, B_2, \dots, B_k$ sont exécutées. Si A est faux, ce sont les instructions $C_1, C_2, \dots, C_k$ qui le sont.

On peut également avoir un conditionnel sans alternative :

Si A Faire $B_1; B_2; B_3; \dots; B_k;$ **Fin Si**

Interprétation : si la condition A n'est pas satisfaite, l'ensemble du bloc des instructions est sauté.

Les boucles. Une boucle se présente de la manière suivante :

Pour tout i de 1 à n Faire $B_1; B_2; B_3; \dots; B_k;$ **Fin Pour**

Interprétation : pour toutes les valeurs entières de i comprises entre 1 et n , les opérations $B_1; B_2; B_3; \dots; B_k$ sont successivement effectuées. Cette boucle est incrémentale, c'est-à-dire que i part de la plus petite valeur 1 pour aller vers la plus grande n . On peut également construire une boucle décrémentale, c'est-à-dire que i part de la plus grande valeur n pour aller vers la plus petite 1.

Les itérations. On dispose de plusieurs types d'itérateurs :

Tant que A Faire $B_1; B_2; B_3; \dots; B_k;$ **Fin Tant**

Interprétation : tant que la condition A est vérifiée, les opérations $B_1; B_2; B_3; \dots; B_k$ sont successivement effectuées.

On dispose également de :

Faire $B_1; B_2; B_3; \dots; B_k;$ **Tant que A** **Fin Faire**

Interprétation : cette structure d'instructions permet l'exécution des opérations $B_1; B_2; B_3; \dots; B_k$ une première fois avant de tester la condition A , même si celle-ci n'est pas vérifiée.

Enfin le dernier bloc itératif d'instructions que nous considérerons est une forme spécifique de boucle :

Pour $a \in A$ **Faire**

$B_1; B_2; B_3; \dots; B_k;$

Fin Pour

Interprétation : les opérations $B_1; B_2; B_3; \dots; B_k$ sont effectuées pour chaque a dans A . Cela sous-entend que A est un ensemble fini ordonné d'une certaine façon.

1.7.2 Complexité en temps d'un algorithme

La **complexité d'un algorithme en temps** est le temps de calcul dont l'algorithme a besoin pour résoudre un problème. Généralement ce temps de calcul dépend de la taille des données d'entrée.

Il existe plusieurs types de complexité :

- la complexité dans le pire des cas ;
- la complexité moyenne ;
- la complexité dans le meilleur des cas.

Dans cet ouvrage, on ne s'intéressera qu'à la complexité dans le pire des cas. On peut donc maintenant définir de manière plus précise la complexité en temps d'un algorithme $\mathcal{A}$. C'est une fonction f , où $f(n)$ est le maximum de pas de calculs (à chaque instruction ou opération élémentaire est associé un coût appelé **pas de calcul**) dont $\mathcal{A}$ a besoin pour résoudre un problème ayant une entrée de longueur n .

Pour formaliser correctement la complexité, nous avons besoin de la définition suivante : soient f et g deux fonctions $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+$. La fonction f est dite **majorée** par g si :

$$\exists c \in \mathbb{R}, c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tels que } (n > n_0 \implies f(n) \leq c \cdot g(n)).$$

Cela veut dire qu'à partir d'une certaine valeur la fonction f est toujours plus petite ou égale à constante fois la fonction g . On dira alors que la fonction f appartient à la classe $O(g)$. Par abus de langage, on écrira $f = O(g)$ là où on devrait écrire $f \in O(g)$.

Par exemple, on a $n^3 + 4n^2 + 13n + 3456 = O(n^3)$.

Exercice 1.9. Montrer que :

- $g = O(g)$ et que $cO(g) = O(g)$;
- $O(g) + O(g) = O(g)$ et que $O(g_1) + O(g_2) = O(\max(g_1, g_2))$;
- $O(O(g)) = O(g)$.

Pour calculer la complexité d'un algorithme, on doit évaluer la complexité de chaque instruction. Dans la plupart des cas, une affectation,

une comparaison, possèdent une complexité constante, noté $O(t)$, t étant une constante. Pour les blocs d'instructions, on calcule le nombre de passages maximums dans le corps du bloc.

Exemple 1.7.1. On considère la boucle suivante :

Pour tout i de 1 à n Faire

$B_1; B_2; B_3; \dots; B_k;$

Fin Pour

Supposons que le temps de calcul de B_1 soit $O(t_1)$, que le temps de calcul B_2 soit $O(t_2), \dots$, que le temps de calcul B_k soit $O(t_k)$, les t_i , $i \in \{1, 2, 3, \dots, k\}$ étant indépendants de n . Ainsi le temps de calcul du corps de la boucle est : $O(\max(t_1, t_2, \dots, t_k))$ (voir exercice 1.9). Le nombre de passages dans la boucle est n , ainsi on effectue chacune des instructions $B_1; B_2; B_3; \dots; B_k$ n fois. Par conséquent la complexité d'une boucle **Pour** est $O(\max(t_1, t_2, \dots, t_k) \cdot n) = O(t \cdot n) = O(n)$ où $t = \max(t_1, t_2, \dots, t_k)$.

On peut naturellement imbriquer des blocs d'instructions :

Pour tout i de 1 à n Faire

Pour tout j de 1 à m Faire

$B_1; B_2; B_3; \dots; B_k;$

Fin Pour

Fin Pour

Dans ce cas, on part du corps d'instructions le plus « profond » dans les boucles et on « remonte ». Ici, les instructions $B_1; B_2; B_3; \dots; B_k$ ont une complexité en $O(\max(t_1, t_2, \dots, t_k)) = O(t)$. La première boucle rencontrée a une complexité en m , la seconde a une complexité en n , par conséquent ce bloc a une complexité en $O(n \cdot m \cdot t) = O(n \cdot m)$.

Exercice 1.10. Calculer la complexité des autres blocs d'instructions définis ci-dessus.

1.7.3 Classes de complexité

La **théorie de la complexité** est sans doute une des parties de l'informatique théorique les plus importantes. Cette théorie est fortement liée à la notion de **mathématique effective** : de manière non formelle on peut dire qu'un problème mathématique est effectif si on peut le résoudre avec un algorithme. Par exemple, calculer les racines d'une équation de second degré, calculer les valeurs propres d'une matrice... sont des problèmes effectifs.

On dit qu'un algorithme est **efficace** pour résoudre un problème si le nombre de pas de calculs pour donner une solution au problème est une fonction (de la taille des entrées) qui croît au plus comme un polynôme. Dans ce cas on dit que le problème est dans la classe $\mathcal{P}$ (pour polynomiale). Pour beaucoup de problèmes, on ignore s'ils appartiennent à cette classe. Nous avons besoin de définir d'autres classes.

Un problème de décision (ceux qui ont une solution oui/non) est dans la classe $\mathcal{NP}$ (pour non déterministe polynomiale) si on peut vérifier une solution de ce problème en un temps polynomial (on verra des exemples plus loin). Une question vient tout de suite à l'esprit : si je peux vérifier en un temps polynomial une solution, cette solution est-elle en temps polynomial ? En d'autres termes, a-t-on $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$?

Cette question, somme toute relativement simple, est un des défis majeurs pour le mathématicien (et naturellement pour l'informaticien digne de ce nom !). Ce problème est le premier des huit problèmes de la liste CLAY : problèmes pour le XXI^e siècle.

Clairement on a $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP}$. C'est l'autre inclusion qui pose difficulté. Soient P_1 et P_2 deux problèmes. On dit que P_1 est **polynomialement réductible** à P_2 s'il existe un algorithme pour résoudre P_2 pouvant être transformé en temps polynomial en un algorithme pour résoudre P_1 .

On peut maintenant définir une autre classe de complexité importante : c'est la classe $\mathcal{NP}$ -complète ou classe $\mathcal{NPC}$. C'est un sous-ensemble de $\mathcal{NP}$ défini de la manière suivante : un problème P de décision est dans la classe $\mathcal{NPC}$ si $P \in \mathcal{NP}$ et si tout problème de la classe $\mathcal{NP}$ est polynomialement réductible à P . Naturellement, si on donne une solution en temps polynomial à un problème quelconque de $\mathcal{NPC}$, on a nécessairement $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

1.8 Définition d'un graphe à partir de la fonction d'incidence

La fonction d'incidence ε permet de donner une définition équivalente de la notion de graphe : c'est un triplet $\Gamma = (V; A, \varepsilon)$ où $\varepsilon : A \longrightarrow P_2(V)$. En effet, à partir d'un graphe $\Gamma = (V; E, N)$, on pose $A = E$ et ε comme indiqué en section 1.1.

Réciproquement soit $\Gamma = (V; A, \varepsilon)$; pour $x, y \in V$ fixés, posons $T_{x,y} = \{a \in A : \varepsilon(a) = [x, y]\}$ fini. Pour tous x, y tels que $T_{x,y} \neq \emptyset$,

une p -arête entre x et y est définie par :

$$E_{x,y} = \{([x,y], 1), ([x,y], 2), \dots, ([x,y], p)\}$$

avec $p = |T_{x,y}|$, le cardinal de $T_{x,y}$.

Dans ce cas $N_{x,y} = \{1, 2, 3, \dots, |T_{x,y}|\}$, ainsi

$$N = \bigcup_{x,y \in V, T_{x,y} \neq \emptyset} N_{x,y} \text{ et } E = \bigsqcup_{x,y \in V, T_{x,y} \neq \emptyset} E_{x,y}.$$

Il s'ensuit que $\Gamma = (V; E, N)$ est un graphe au sens du paragraphe 1.1. Pour quelle raison avons-nous introduit l'ensemble « auxiliaire » A ? La description du graphe Γ par le triplet $(V; A, \varepsilon)$ avec $A = E$ possède un avantage lorsque A peut être réalisé concrètement par des objets divers, c'est donc une réalisation concrète du graphe. On ne confond pas une arête qui est un triplet avec l'objet qu'elle représente. Par exemple, l'ensemble des sommets est un ensemble de points du plan, les étiquettes (éléments de N) sont des entiers naturels. Un élément $a \in A$ est une courbe entre deux points du plan que l'on étiquette par un entier naturel. Maintenant nous pouvons nous permettre d'identifier A avec E : A est une réalisation de E .

De façon analogue, un digraphe peut aussi bien être décrit avec les fonctions d'incidence $i, t : \Gamma = (V; \vec{E}, i, t)$ où $i, t : \vec{E} \rightarrow V$.

1.9 Isomorphismes de graphes. Groupes d'automorphismes

Comme pour toute structure mathématique, il est intéressant de pouvoir comparer deux (di)graphes entre eux. C'est la notion d'isomorphisme qui permet d'exprimer formellement cette idée.

Soient $\Gamma = (V; E, N)$ et $\Gamma' = (V', E', N')$ deux graphes. Un **isomorphisme** entre ces deux graphes est une bijection f :

$$f : V \sqcup E \longrightarrow V' \sqcup E' \quad (V \sqcup E \text{ désigne la réunion disjointe}),$$

vérifiant :

- $f|_V : V \longrightarrow V'$ est bijective ;
- $f|_E : E \longrightarrow E'$ est bijective ;
- pour toute arête $a = ([x,y], n) \in E$, il existe $n' \in N'$ tel que $f|_E(a) = ([f|_V(x), f|_V(y)], n')$.

Exemple 1.9.1. On considère les deux graphes de la figure 1.14 : 1 s'envoie sur c , 4 sur d , 3 sur b et 2 sur a . L'arête $([1; 4], l_3)$ s'envoie sur l'arête $([d; c], t_4)$; l'arête $([1; 4], l_2)$ s'envoie sur l'arête $([d; c], t_3)$; l'arête $([1; 3], l_1)$ s'envoie sur l'arête $([b; c], t_2)$; l'arête $([2; 3], l_4)$ s'envoie sur l'arête $([a; b], t_1)$; et l'arête $([2; 4], l_5)$ s'envoie sur l'arête $([a; d], t_5)$.

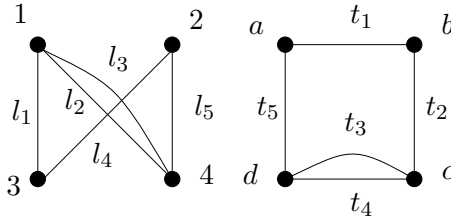


Figure 1.14 – Deux graphes isomorphes.

On a alors la **propriété d'incidence** : soient $\varepsilon, \varepsilon'$ les fonctions d'incidence respectives des graphes Γ et Γ' :

$$[I] \quad \forall a \in E \quad : \quad f(\varepsilon(a)) = \varepsilon'(f(a)).$$

La propriété d'incidence se traduit par le **diagramme commutatif** (c'est-à-dire $f \circ \varepsilon = \varepsilon' \circ f$) suivant :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varepsilon} & P_2(V) \\ \downarrow f & & \downarrow f \\ E' & \xrightarrow{\varepsilon'} & P_2(V') \end{array}$$

où il est entendu que si $A \in P_2(V)$, $f(A) = \{f(x), x \in A\} \in P_2(V')$.

On note $f : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$ un tel isomorphisme. Lorsque Γ et Γ' sont définis par leurs fonctions d'incidence

$$\Gamma = (V; E, \varepsilon), \quad \Gamma' = (V'; E', \varepsilon'),$$

il revient au même de définir l'isomorphisme $f : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$ par

- $f|_V : V \longrightarrow V'$ bijective;
- $f|_E : E \longrightarrow E'$ bijective;
- $f \circ \varepsilon = \varepsilon' \circ f$.

Remarque 1.9.2. Lorsque les graphes sont simples, la donnée de $f|_V$ détermine $f|_E$, grâce à la propriété d'incidence [I]. Nous reviendrons sur ce point au § 7.4.1.

Pour un **isomorphisme de digraphes** la définition est la même, les arcs s'écrivent $a = ((x, y), n)$; la propriété d'incidence devient :

$$[\vec{\Gamma}] \quad \forall a \in \vec{E} : f(i(a)) = i'(f(a)) \text{ et } f(t(a)) = t'(f(a)).$$

où i, i', t, t' sont les fonctions d'incidence des graphes $\vec{\Gamma} = (V; \vec{E}, N)$ et $\vec{\Gamma}' = (V'; \vec{E}', N')$.

Exercice 1.11. i) Soient $\Gamma = (V; E, N)$ et $\Gamma' = (V'; E', N')$ deux graphes isomorphes, d'ordre fini. Montrer que ces deux graphes ont :

- le même nombre de sommets ;
- le même nombre d'arêtes ;
- la même distribution des degrés ;
- le même nombre de composantes connexes.

ii) Adapter cet énoncé pour des graphes orientés.

Comme la figure 1.15 et l'exemple suivant le montrent, les conditions de l'exercice ci-dessus sont nécessaires mais pas suffisantes.

Exemple 1.9.3. Les deux graphes de la figure 1.15 ont le même nombre d'arêtes et le même nombre de sommets. Ils ont également la même distribution des degrés ; néanmoins, ils ne sont pas isomorphes. En effet dans le premier graphe le sommet x_3 est de degré 3, donc celui-ci doit s'envoyer sur le sommet y_2 qui est le seul de degré 3 ; or x_3 a deux voisins de degré 2, un voisin de degré 1, alors que y_2 a un voisin de degré 2 et deux voisins de degré 1.

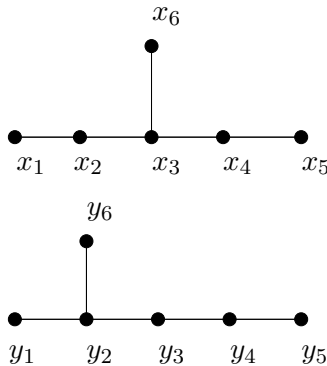


Figure 1.15 – Deux graphes non isomorphes.

Un **automorphisme** est un isomorphisme d'un graphe dans lui-même.

Exercice 1.12. Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe ; montrer que l'ensemble des automorphismes de Γ muni de la loi de composition des applications forme un groupe (voir § 1.10) : l'élément neutre Id_Γ est l'application identique de $V \sqcup E$ et l'inverse de f est f^{-1} . On notera ce groupe $\text{Aut}(\Gamma)$.

La notion de groupe est sans doute l'une des plus simples et fécondes des mathématiques. On retrouve cette théorie, certes en mathématiques, mais également en physique, en chimie, en sciences de l'ingénieur... De manière simple, le groupe des automorphismes d'un objet permet de « mesurer » les symétries de cet objet. Dans notre cas, si le cardinal de $\text{Aut}(\Gamma)$ est grand le graphe a beaucoup de « symétries ». De manière plus explicite, beaucoup de sommets, d'arêtes (ou arcs) jouent un rôle identique.

Le problème d'isomorphisme entre deux graphes, noté GI, est un des plus importants problèmes de la théorie de la complexité. Ce problème, relativement vieux, n'est toujours pas résolu. De manière plus précise on ne sait pas dans quelle classe de complexité il se trouve : existe-t-il un algorithme ayant une complexité polynomiale permettant de décider si deux graphes donnés sont isomorphes ? On peut montrer facilement que ce problème est dans la classe $\mathcal{NP}$. En effet, supposons que nous ayons un isomorphisme f entre deux graphes. Vérifier si f est une bijection qui préserve l'adjacence se fait en temps polynomial. Néanmoins on ne sait pas si ce problème est dans la classe $\mathcal{P}$ ou s'il est dans la classe $\mathcal{NPC}$.

Il semblerait¹ que l'isomorphisme de graphes ne soit ni dans l'une ni dans l'autre classe. Cela voudrait dire que GI serait entre ces deux classes. Si tel était le cas, on aurait nécessairement $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$.

Un autre problème non résolu consiste en la détermination du cardinal du groupe d'automorphismes d'un graphe d'ordre fini. En fait ce problème et le précédent sont liés.

Théorème 1.9.4. Soient $\Gamma_1 = (V_1; E_1)$ et $\Gamma_2 = (V_2; E_2)$ deux graphes simples connexes. On considère l'union disjointe : $\Gamma = (V; E) = \Gamma_1 + \Gamma_2$.

i) L'application

$$j : \text{Aut}(\Gamma_1) \times \text{Aut}(\Gamma_2) \longrightarrow \text{Aut}(\Gamma)$$

définie par $j(f_1, f_2) = g$, où $g(x) = f_1(x)$ si $x \in V_1$ et $g(x) = f_2(x)$ si $x \in V_2$, est un morphisme de groupes injectif.

1. Voir J. KÖBLER, U. SCHÖNING & J. TURAN. *The Graph Isomorphism Problem: its Structural Complexity*, Birkhäuser, 1993.

- ii) j est surjectif si et seulement si Γ_1 n'est pas isomorphe à Γ_2 ; donc dans ce cas, si les graphes sont d'ordre fini, on a :

$$|\text{Aut}(\Gamma)| = |\text{Aut}(\Gamma_1)| \times |\text{Aut}(\Gamma_2)|.$$

Démonstration. i) est immédiat car f_1 et f_2 agissent séparément sur V_1 et V_2 .

ii) Supposons que Γ_1 ne soit pas isomorphe à Γ_2 ; par construction $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ est la décomposition connexe de Γ . Soit $f \in \text{Aut}(\Gamma)$; $f(\Gamma_1)$ est clairement un sous-graphe connexe de Γ , donc d'après le lemme 1.2.1, on a $f(V_1) \subset V_2$ ou $f(V_1) \subset V_1$ (idem pour $f(V_2)$) :

- ou bien $f(V_1) \subset V_2$; alors $f(V_1) = V_2$: en effet sinon $V_2 \setminus f(V_1) \neq \emptyset$ et $V_2 \setminus f(V_1) \subset f(V_2)$; $f(V_2)$ est connexe et d'après le lemme 1.2.1 on a : $f(V_2) \subset V_2$. De là : $f(V_1) \cup f(V_2) = f(V_1 \cup V_2) \subset V_2$, mais $f(V_1 \cup V_2) = V_1 \cup V_2$, contradiction. Comme les graphes sont simples, de $f(V_1) = V_2$ on déduit que $f(E_1) = E_2$; il s'ensuit que

$$f|_{\Gamma_1} : \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2$$

est un isomorphisme, ce qui est contradictoire ;

- ou alors $f(V_1) \subset V_1$; d'où $f(V_1) = V_1$, $f(V_2) = V_2$ (pour les mêmes raisons que ci-dessus) et les graphes étant simples, $f(E_1) = E_1$, $f(E_2) = E_2$; donc $f = j(f_1, f_2)$ où $f_1 = f|_{\Gamma_1}$, $f_2 = f|_{\Gamma_2}$. Par conséquent pour tout $f \in \text{Aut}(\Gamma)$ il existe $(f_1, f_2) \in \text{Aut}(\Gamma_1) \times \text{Aut}(\Gamma_2)$ tel que $j(f_1, f_2) = f$.

Supposons que $\varphi : \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2$ soit un isomorphisme ; on construit $\psi \in \text{Aut}(\Gamma)$ par : $\psi(x) = \varphi(x)$ si $x \in V_1$, $\psi(x) = \varphi^{-1}(x)$ si $x \in V_2$ (car l'inverse d'un isomorphisme est un isomorphisme). Il est clair que $\psi \notin \text{Im}(j)$. $\square$

Lorsque les graphes Γ_1 et Γ_2 sont isomorphes, le groupe $\text{Aut}(\Gamma_1 + \Gamma_2)$ est plus compliqué ; nous étudierons cette question au § 9.2.1.

Ainsi le problème de l'isomorphisme de graphes peut se ramener au problème du calcul de l'ordre (cardinal) du groupe d'automorphismes d'un graphe : s'il existe un algorithme capable de calculer l'ordre du groupe d'automorphismes d'un graphe en un temps polynomial, alors GI est dans la classe $\mathcal{P}$. Si on montre qu'un tel algorithme n'existe pas, on a gagné 1 million de dollars (prix de la fondation CLAY pour ce problème) car dans ce cas cela impliquerait l'inclusion stricte $\mathcal{P} \subsetneq \mathcal{NP}$!

1.10 Compléments : quelques structures de base

Une **distance** sur un ensemble X est une application

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

vérifiant les propriétés suivantes, pour tous $x, y, z \in X$:

- i) $d(x, y) \geq 0$ et $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$,
- ii) $d(x, y) = d(y, x)$,
- iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

(X, d) est alors appelé **espace métrique**.

Les espaces métriques sont des cas particuliers d'espaces topologiques, pour lesquels nous pouvons définir naturellement certaines notions importantes comme celle de limites ou celle de **boules ouvertes**

$$\mathcal{B}_d(x, r) = \{y \in E : d(x, y) < r\} \quad (r > 0)$$

qui jouent un rôle fondamental. On remarquera que si d est la distance attachée à un graphe (définie au § 1.1.3), alors pour $1 < r < 2$, on a $\mathcal{B}_d(x, r) = \{x\} \cup \Gamma(x)$.

Une relation d'**équivalence** sur un ensemble E est une relation binaire R vérifiant :

- i) xRx pour tout $x \in E$ (réflexivité),
- ii) $\forall x, y \in E, xRy \Rightarrow yRx$ (symétrie),
- ii) $\forall x, y, z \in E, xRy$ et $yRz \Rightarrow xRz$ (transitivité).

Pour $x \in E$, $R(x) = \{y \in X : xRy\}$ est appelée classe de x modulo R et on a une partition de E : $E = \sqcup_{x \in \overline{E}} R(x)$, où $\overline{E}$ est un ensemble de représentants des classes modulo R . Réciproquement il est facile de montrer que toute partition de E fournit une relation d'équivalence.

Un **préordre** sur un ensemble E est une relation binaire $\leq$ sur E vérifiant :

- i) $x \leq x$ pour tout $x \in E$ (réflexivité),
- ii) $\forall x, y, z \in E, x \leq y$ et $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (transitivité).

On dit alors que $(E, \leq)$ est un **ensemble préordonné**. Au préordre $\leq$, on associe une relation binaire R définie par :

$$xRy \quad \text{si et seulement si} \quad x \leq y \text{ et } y \leq x.$$

Alors R est une relation d'équivalence dite **équivalence associée au préordre $\leq$** .

Lorsque de plus

iii) $x \leq y$ et $y \leq x \Rightarrow x = y$ (antisymétrie),

on dit que $\leq$ est une relation d'ordre ou un **ordre** sur E .

Si l'ordre $\leq$ vérifie :

iv) $\forall x, y \in E : x \leq y$ ou $y \leq x$ (tous les éléments sont comparables),

on dit que $\leq$ est un **ordre total**.

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et soit $A \subset E$.

On dit que $x \in E$ est un **majorant** de A si pour tout $a \in A$, on a $a \leq x$ (si $A = \emptyset$ tout $x \in E$ est majorant de A !).

Si x est majorant de A et $x \in A$, on dit que x est le **plus grand élément** de A ; cet élément (évidemment unique) est noté $\max(A)$.

De même on dit que $x \in E$ est un **minorant** de A si pour tout $a \in A$, on a $x \leq a$ (si $A = \emptyset$, tout $x \in E$ est minorant de A !).

Si x est minorant de A et $x \in A$, on dit que x est le **plus petit élément** de A ; cet élément (évidemment unique) est noté $\min(A)$.

Lorsque l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément s , on dit que s est la **borne supérieure** de A et on la note $s = \sup(A)$.

De la même façon la **borne inférieure** $\inf(A)$ de A est le plus grand (s'il existe) des minorants de A .

Un élément $m \in A$ est dit **élément maximal** de A si

$$x \in A \quad \text{et} \quad m \leq x \implies x = m.$$

De même un élément $m \in A$ est dit **élément minimal** de A si

$$x \in A \quad \text{et} \quad x \leq m \implies x = m.$$

Dans un ensemble ordonné fini, toute partie non vide admet (au moins) un élément maximal et un élément minimal. Il peut y avoir plusieurs éléments minimaux ou maximaux.

Un **groupe** G est un ensemble muni d'une loi de composition interne

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (a, b) &\longmapsto a \cdot b \end{aligned}$$

telle que

- pour tous $a, b, c \in G$, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$; la loi est dite **associative**;
- il existe $e \in G$ tel que pour tout élément a de G , $e \cdot a = a \cdot e = a$; cet élément (nécessairement unique) s'appelle l'élément **neutre**;

- pour tout élément $a \in G$ il existe $x \in G$ tel que $a \cdot x = x \cdot a = e$;
cet élément (unique) est appelé **inverse** de a et on le note a^{-1} .

Si de plus pour tous $x, y \in G$ on a : $x \cdot y = y \cdot x$ on dit que le **groupe est commutatif ou abélien** ; dans ce cas la loi est souvent notée additivement : $x + y$.



Chapitre 2

Quelques graphes remarquables

Dans la grande flore des graphes, nous étudions ici quelques espèces, utilisées dans de nombreux domaines comme les réseaux de télécommunications, la recherche opérationnelle et l'ordonnancement ou l'informatique parallèle.

Les premiers graphes étudiés sont les graphes bipartis. La deuxième partie est consacrée aux arbres et aux arborescences. La partie suivante traite des graphes sans circuit. Finalement, les (di)graphes eulériens et hamiltoniens sont abordés. Pour illustrer le caractère effectif des résultats, nous développons quelques algorithmes. Nous avons volontairement omis dans ce chapitre les graphes planaires : ceux-ci seront étudiés au chapitre 5.

2.1 Graphes bipartis

Soit $k \geq 1$ un entier. Un graphe **simple** $\Gamma = (V; E)$ est dit **k -parti** s'il existe une partition de l'ensemble de ses sommets $V = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_k$ de telle sorte qu'aucun des sous-graphes induits $\Gamma(V_i)$, $i = 1, \dots, k$, ne contienne d'arête. Un graphe 1-parti est donc simplement un graphe sans arête. Les parties V_i , $i = 1, \dots, k$, forment ce que l'on appelle une **k -partition**, associée au graphe k -parti Γ .

Un graphe k -parti est dit **complet** si

$$\forall i, j \in \{1, \dots, k\}, i \neq j, \forall x \in V_i, \forall y \in V_j, \text{ on a } \{x, y\} \in E.$$

Lorsque $|V_i| = n_i, 1 \leq i \leq k$, on notera $K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ un « modèle » du

graphe k -parti complet correspondant. Le graphe $K_{1,n}$ est appelé **étoile**. Pour $k = 2$, nous obtenons une classe importante de graphes, les **graphes bipartis**.

Exemple 2.1.1. Les graphes montrés en figure 2.1 sont 3-partis, les parties des 3-partitions sont visualisées en pointillé. Le second est plus précisément k -parti complet : $K_{2,2,3}$.

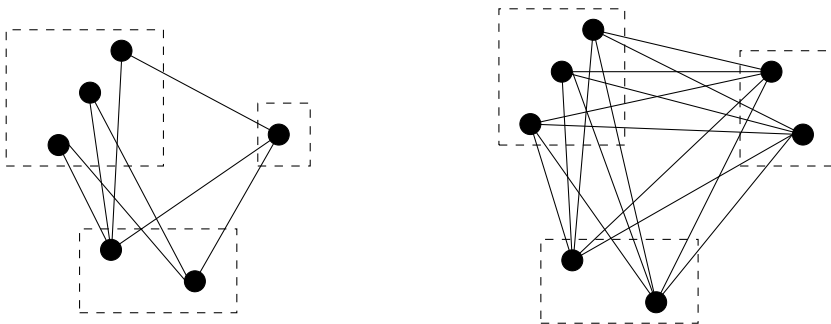


Figure 2.1 – Deux graphes 3-partis.

Les graphes bipartis sont caractérisés par le théorème suivant.

Théorème 2.1.2. Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe simple d'ordre fini. Γ est biparti si et seulement s'il ne contient pas de cycle de longueur impaire.

Démonstration. Un graphe est biparti si et seulement si toutes ses composantes connexes sont biparties. On peut donc supposer que Γ est connexe.

Nécessité : supposons que $\Gamma = (V; E)$ soit biparti : $V = V_1 \sqcup V_2$. Soit $C = (x_0, a_1, x_1, a_2, \dots, a_{k-1}, x_k)$ un cycle (chaîne fermée simple) avec $x_k = x_0$. On peut supposer par exemple que $x_0 \in V_1$; comme V_1 est sans arête, on a nécessairement $x_1 \in V_2$; de même V_2 est sans arête, donc $x_2 \in V_1$; par récurrence, on établit que $x_i \in V_1$ si i est pair et $x_i \in V_2$ si i est impair. Il s'ensuit donc, puisque $x_k = x_0$ est dans V_1 , que k est pair.

Suffisance : supposons réciproquement que Γ ne contienne pas de cycle impair. Soit x un sommet de Γ choisi arbitrairement. Soit d la distance du graphe Γ considéré comme espace métrique (voir § 1.1.3) ; on définit $V_1 = \{y \in V : d(x, y) \text{ est pair}\}$ et $V_2 = \{y \in V : d(x, y) \text{ est impair}\}$ de sorte que $V = V_1 \sqcup V_2$ et $x \in V_1$. Montrons qu'il n'y a aucune arête entre

les sommets de V_1 , entre les sommets de V_2 . Pour cela on raisonne par l'absurde :

– s'il existe une arête $a = \{u, v\}$ avec $u, v \in V_1$; le graphe étant connexe, il existe C_u et C_v deux chaînes élémentaires de longueur minimum reliant d'une part x à u et d'autre part x à v ; par définition de V_1 , $d(x, u)$ et $d(x, v)$ sont pairs, donc C_u et C_v ont des longueurs paires ; les chaînes C_u et C_v ont éventuellement des sommets communs : partant de x , il existe un dernier sommet z commun à C_u et C_v . Par minimalité, les longueurs des sous-chaînes de C_u et C_v allant de x à z sont toutes deux égales à $d(x, z)$ et ont en particulier même parité. Il s'ensuit que les longueurs des sous-chaînes de C_u et C_v joignant z à u et z à v , qui sont de longueurs respectives égales à $d(z, u)$ et $d(z, v)$ (à nouveau par minimalité), ont même parité. Ainsi la chaîne obtenue en allant de z à u en suivant C_u , puis de u à v selon $\{u, v\}$, puis de v à z suivant C_v est de longueur $d(z, u) + 1 + d(v, z)$ impaire : contradiction.

– s'il existe une arête $a = \{u, v\}$ avec $u, v \in V_2$, le graphe étant connexe, il existe C_u et C_v deux chaînes élémentaires de longueur minimum reliant d'une part x à u , d'autre part x à v ; par définition de V_2 , $d(x, u)$ et $d(x, v)$ sont impairs, donc C_u et C_v ont des longueurs impaires ; comme dans le cas précédent, il existe un sommet z commun à C_u et C_v tel que la chaîne obtenue en allant de z à u en suivant C_u , puis de u à v selon $\{u, v\}$, puis de v à z suivant C_v est alors un cycle de longueur impaire : contradiction. $\square$

Un exemple important de graphe biparti est fourni par les **k -cubes**, appelés également hypercubes, notés Q_k , avec $k \geq 1$: un k -cube est un graphe simple dont l'ensemble des sommets est $V = \{0, 1\}^k$; l'ensemble E des arêtes est défini ainsi : si $x = (x_1, \dots, x_k)$ et $y = (y_1, \dots, y_k)$ sont dans V , alors $\{x, y\} \in E$ si et seulement si $x_i = y_i$ pour tout sauf exactement un indice i_0 , $1 \leq i_0 \leq k$. Ainsi Q_1 est formé de 2 sommets reliés par une arête, Q_2 est un carré. Le 3-cube est montré en figure 2.2.

Exercice 2.1. Montrer qu'un cube Q_k est un graphe biparti régulier de degré k ayant 2^k sommets.

Considérons l'algorithme suivant (le graphe est connu à travers les listes A_y des sommets adjacents à y , $y \in V$) :

GrapheBiparti

Entrée : un graphe $\Gamma = (V; E)$, un sommet x ;

Sortie : biparti (booléen vrai ou faux), V_1 et V_2 (le cas échéant) ;

Initialisation : $L = \emptyset$; (liste intermédiaire initialisée au vide)

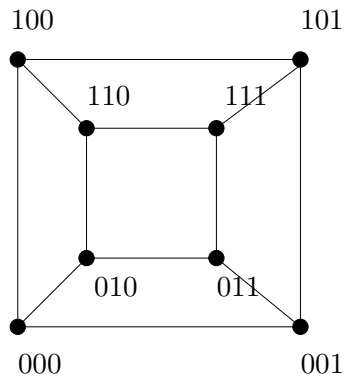


Figure 2.2 – Un modèle du 3-cube.

Initialisation : $d(x) = 0$; (distance de x à x fixée à 0)

Initialisation : $\text{biparti} = \text{vrai}$, $V_1 = \emptyset$; (variable booléenne, première partie de la partition des sommets)

Ajouter x à L ;

Tant que L n'est pas vide **Et que** $\text{biparti} == \text{vrai}$ **Faire**

Enlever le premier sommet y de L ;

Pour Tout $u \in A_y$ **Faire**

Si $d(u)$ n'est pas initialisée **Alors**

$d(u) = d(y) + 1$;

Ajouter u à L ;

Sinon

Si $d(u) == d(y)$ **Alors**

$\text{biparti} = \text{faux}$;

Fin Si

Fin Pour

Fin Tant

Si $\text{biparti} == \text{vrai}$ **Alors**

Pour Tout $x \in V$ **Faire**

Si $d(x) \equiv 0 \pmod{2}$ **Alors**

$V_1 = V_1 \cup \{x\}$;

Fin Si

Fin Pour

$V_2 = V \setminus V_1$;

Fin Si

Fin

Théorème 2.1.3. *L'algorithme **GrapheBiparti** détermine si un graphe simple d'ordre fini est biparti ou non. Si c'est le cas, il donne une 2-partition avec une complexité en $O(|E|)$.*

Démonstration. Cette preuve est laissée à titre d'exercice.

Indication : utiliser le fait que $|E| = O(|V|^2)$. □

Proposition 2.1.4. *Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe connexe biparti, d'ordre fini ou non ; alors la bipartition $V = V_1 \sqcup V_2$ est unique.*

Démonstration. Fixons un sommet quelconque x et posons, comme dans le théorème 2.1.2, $V_1 = \{y \in V : d(x, y) \text{ est pair}\}$ et $V_2 = \{y \in V : d(x, y) \text{ est impair}\}$ de sorte que $V = V_1 \sqcup V_2$ et $x \in V_1$.

Soit alors $V = W_1 \sqcup W_2$ une bipartition quelconque de V et supposons par exemple que $x \in W_1$; pour tout $y \in V$, soit

$$C_y = (x, a_1, x_1, \dots, x_{n-1}, a_n, y)$$

une chaîne élémentaire de longueur minimum $n = n_y = d(x, y)$ entre x et y (on convient que $x_n = y$). Par minimalité de C_y , on a $d(x, x_k) = k$, $k \geq 1$, donc $x_k \in V_1$ ou V_2 selon que k est pair ou non. De même, comme $V = W_1 \sqcup W_2$ est une bipartition, on a aussi $x_k \in W_1$ ou W_2 selon que k est pair ou non. On a

– $W_1 \subset V_1$: en effet soit $y \in W_1$; comme $x \in W_1$, la longueur de C_y est paire, d'où $y \in V_1$.

– $W_2 \subset V_2$: soit $y \in W_2$; comme $x \in W_1$, n_y est impair donc $y \in V_2$.

Comme $V = V_1 \sqcup V_2 = W_1 \sqcup W_2$, il en résulte que $W_1 = V_1$ et $W_2 = V_2$. □

On remarquera que la proposition est fausse sans l'hypothèse de connexité.

2.2 Arbres et arborescences

2.2.1 Arbres

Les arbres généalogiques sont l'exemple type. La théorie darwinienne de l'évolution représente aussi les espèces selon un arbre, mais les mécanismes de fusion évolutive (endosymbiose, hybridation et transfert de gènes) laissent plutôt penser à un modèle voisin du réseau.

Un **arbre** est un graphe connexe sans cycle. Ainsi un arbre est nécessairement simple. Il existe plusieurs caractérisations agréables des arbres.

Théorème 2.2.1. *Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe simple.*

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) Γ est un arbre.
- ii) Γ est connexe et chaque arête est un isthme.
- iii) Deux sommets distincts sont connectés par exactement une chaîne élémentaire.
- iv) Γ est sans cycle et l'ajout d'une nouvelle arête crée exactement un cycle élémentaire.

Si de plus Γ est d'ordre fini, ces assertions sont aussi équivalentes à chacune des assertions :

- v) Γ est sans cycle et $|E| = |V| - 1$.
- vi) Γ est connexe et $|E| = |V| - 1$.

Démonstration. i) $\implies$ ii) : ôtons l'arête $a = \{x, y\}$; si le sous-graphe obtenu est connexe, alors il y a une chaîne C et donc une chaîne élémentaire (voir exercice 1.1) entre x et y n'empruntant pas l'arête a . Ainsi, en concaténant C et a , on obtient un cycle dans Γ empruntant l'arête a . Contradiction.

ii) $\implies$ iii) : le graphe étant connexe, chaque paire de sommets est connectée par au moins une chaîne élémentaire. S'il existe dans le graphe une paire de sommets $\{x, y\}$ connectés par deux chaînes élémentaires distinctes C_1 et C_2 , il y a une arête de l'une de ces chaînes, disons $a \in C_2$, telle que $a \notin C_1$. On va alors mettre en évidence un cycle : partant de x , on considère le premier sommet z en lequel la chaîne élémentaire C_2 se sépare de C_1 . Puis on désigne par z' le premier sommet venant « après » z où la chaîne C_2 rejoint C_1 : on ne peut avoir $z' = z$ car C_2 est élémentaire ; cela induit deux sous-chaînes allant de z à z' disjointes et formant naturellement un cycle élémentaire par concaténation. Les arêtes de ce cycle ne sont évidemment pas des isthmes.

iii) $\implies$ iv) : si on ajoute une arête $a = \{x, y\}$, x et y sont par hypothèse déjà connectées par exactement une chaîne élémentaire, d'après iii) ; on obtient par concaténation avec a un cycle élémentaire. Si un deuxième cycle élémentaire était créé par adjonction de a , on aurait une deuxième chaîne élémentaire entre x et y : contradiction.

iv) $\implies$ i) : si Γ_1 et Γ_2 étaient deux composantes connexes de Γ , en ajoutant une arête entre Γ_1 et Γ_2 , on ne créerait pas de cycles.

i) $\implies$ v) : d'après les propositions 1.4.2 et 1.4.3.

v) $\implies$ vi) : soit $\Gamma = \Gamma_1 + \dots + \Gamma_k$ la décomposition connexe de Γ (voir

§ 1.5) ; chaque $\Gamma_i = (V_i; E_i)$ est connexe, donc (voir proposition 1.4.2 i)) possède $|E_i| \geq |V_i| - 1$ arêtes, et sans cycle donc (voir proposition 1.4.3) $|E_i| \leq |V_i| - 1$, d'où $|E_i| = |V_i| - 1$. Alors

$$|E| = \sum_{1 \leq i \leq k} |E_i| = \sum_{1 \leq i \leq k} (|V_i| - 1) = |V| - k ;$$

comme par hypothèse $|E| = |V| - 1$, on déduit $k = 1$, c'est-à-dire Γ est connexe.

vi) $\implies$ ii) : si on supprime une arête, on a $|E| = |V| - 2$; le graphe obtenu n'est plus connexe d'après la proposition 1.4.2. $\square$

Exemple 2.2.2. Le degré de parenté dans un arbre généalogique est la distance dans l'arbre correspondant entre les différents sommets ; pour le calculer, on remonte au premier ancêtre commun.

Une **forêt** est un graphe sans cycle (donc nécessairement simple) : ainsi les composantes connexes d'une forêt sont des arbres. La figure 2.3 montre des arbres et des forêts.

Une **feuille** dans une forêt est un sommet de degré égal à 1.

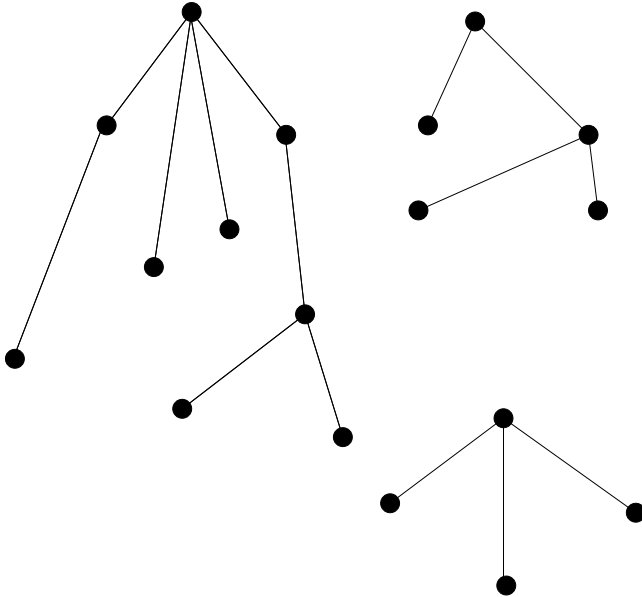


Figure 2.3 – Forêt comportant trois arbres et onze feuilles.

Corollaire 2.2.3. *Soit Γ une forêt ayant n sommets et k composantes connexes. Alors Γ possède $n - k$ arêtes.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le vi) du théorème 2.2.1 à chacune des k composantes connexes de Γ . $\square$

Corollaire 2.2.4. *Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe simple d'ordre fini ayant k composantes connexes. Le graphe est sans cycle si et seulement si $|E| = |V| - k$.*

Démonstration. Si Γ est sans cycle, c'est une forêt et on a $|E| = |V| - k$ d'après le corollaire 2.2.3.

Réciproquement si $|E| = |V| - k$, soient $(\Gamma_i)_{1 \leq i \leq k}$, $\Gamma_i = (V_i; E_i)$, les composantes connexes de Γ ; d'après la proposition 1.4.2, $|E_i| \geq |V_i| - 1$ pour tout i ; il s'ensuit que $|E| \geq |V| - k$; mais comme par hypothèse $|E| = |V| - k$, on a forcément $|E_i| = |V_i| - 1$ pour chaque i . Or Γ_i est connexe, donc par le vi) du théorème 2.2.1, Γ_i est un arbre, donc n'a pas de cycle; d'où Γ est sans cycle. $\square$

Proposition 2.2.5. *Un arbre $\Gamma = (V; E)$ ayant $|V| \geq 2$ sommets admet au moins deux feuilles.*

Démonstration. La somme des degrés dans un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes (voir lemme 1.1.9). On a $|E| = n - 1$ et :

$$2n - 2 = \sum_{x \in V} d(x).$$

Soit alors t le nombre de sommets de degré 1; il y a donc $(n - t)$ sommets de degré ≥ 2 et :

$$2n - 2 = \sum_{x \in V} d(x) = t + \sum_{x \in V, d(x) \geq 2} d(x) \geq t + 2(n - t)$$

d'où il résulte que $t \geq 2$. $\square$

Proposition 2.2.6. *Un graphe $\Gamma = (V; E, N)$ d'ordre fini admet un arbre $\Gamma' = (V; E', N')$ comme graphe partiel si et seulement s'il est connexe.*

Démonstration. Un graphe qui admet un graphe partiel connexe est connexe. Réciproquement, supposons que Γ est connexe : si c'est un arbre on a fini; sinon, d'après le théorème 2.2.1, il contient une arête a

qui n'est pas un isthme ; si le graphe $\Gamma \setminus a$, qui est connexe, est un arbre on a fini ; sinon on réitère le processus (un nombre fini de fois car $|E|$ est fini) jusqu'à obtenir un graphe connexe dont toutes les arêtes sont des isthmes. C'est donc un arbre par le ii) du théorème 2.2.1. $\square$

Un graphe partiel de Γ qui est un arbre est appelé **arbre de recouvrement** de Γ . Voici un exemple important : il s'agit de minimiser la longueur des réseaux qui connectent un ensemble de points du plan.

Soit $n \geq 1$ un entier ; on appelle **arbre de STEINER** un arbre dont les sommets sont n points $x_1, x_2, \dots, x_n$ du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ à coordonnées entières, appelés **points de STEINER**, reliés entre eux de sorte que la somme des distances $\|x_i - x_j\|$, $1 \leq i < j \leq n$, soit minimum. Le problème de déterminer un arbre de Steiner de longueur minimum (pour la distance usuelle dans $\mathbb{R}^2$) est appelé **problème euclidien de STEINER**. Il a été intensivement étudié par de nombreux auteurs¹. On peut montrer que ce problème est dans la classe $\mathcal{NPC}^2$.

Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe connexe, muni d'un poids (ou valuation) sur les arêtes :

$$\omega : E \longrightarrow \mathbb{R}^+.$$

L'algorithme très simple suivant est dû à KRUSKAL (1956). Il donne un arbre $\mathcal{A}$ de recouvrement de poids $\sum_{a \in E(\mathcal{A})} \omega(a)$ minimum.

On suppose que les arêtes sont triées par ordre de poids croissant : $E = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ avec $\omega(a_1) \leq \omega(a_2) \leq \dots \leq \omega(a_m)$.

Algorithme de KRUSKAL

Entrée : Γ, ω ; **Sortie** : T ;

$T = \emptyset$; (arbre initialisé)

Pour Tout i de 1 à m **Faire**

Si a_i ne forme pas un cycle avec des arêtes de T **Alors**

Adjoindre a_i à T ;

Fin Si

Fin Pour

Fin

Théorème 2.2.7. *Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe simple connexe ayant au moins une arête. Alors l'algorithme de KRUSKAL construit un arbre de recouvrement T de poids minimum avec une complexité de $O(|E| \log(|E|))$.*

1. E.N. GILBERT & H.O. POLLAK. Steiner minimal trees, *SIAM Journal of Applied Mathematics* 16 (1968), 1–19.

2. M.R. GAREY & D.S. JOHNSON. *Computers and Intractability : a Guide to the Theory of $\mathcal{NP}$ -Completeness*, Freeman, New York, 1979.

Démonstration. L'algorithme produit un arbre T par adjonctions successives d'arêtes a_i , $i = 1, \dots, k$. On pose $E' = \{a_1, \dots, a_k\}$; T est le sous-graphe induit $T = \Gamma(E')$.

– L'arbre T est un arbre de recouvrement : s'il existait un sommet x de Γ incident à T et n'étant pas dans $V(T)$, il y aurait une arête $a = \{x, y\}$, $y \in V(T)$, telle que $a \notin E(T) = E'$; par construction $E' \cup \{a\}$ contiendrait un cycle, donc x serait élément de $V(T)$.

– T est un arbre de poids minimum : soit T_1 un arbre de recouvrement quelconque et soit a_i la première arête produite par l'algorithme qui n'est pas dans T_1 ; donc $a_1, a_2, \dots, a_{i-1} \in T \cap T_1$. Comme T_1 est un arbre de recouvrement, si on ajoute a_i à T_1 on obtient un cycle C ; ce cycle contient une arête $a \in T_1$ qui n'est pas dans T (sinon T contiendrait un cycle). Remplaçons dans T_1 l'arête a par l'arête a_i : on obtient un nouvel arbre de recouvrement T_2 . En effet s'il y avait un cycle (élémentaire) C' dans T_2 , d'une part ce cycle devrait contenir a_i (sinon ce serait un cycle de T_1) et d'autre part $C' \setminus a_i$ serait une chaîne de T_1 entre x et y , où $a_i = \{x, y\}$; puisque a n'est pas sur C' , on formerait alors un cycle de T_1 en suivant C de x à y , passant par a , puis en empruntant C' de y à x (voir figure 2.4). Notons que T_2 a une arête de plus en commun avec T que T_1 .

De plus $\omega(a_i) \leq \omega(a)$: sinon $\omega(a) < \omega(a_i)$; comme a n'a pas été choisie à l'étape i par l'algorithme, cela veut dire qu'elle forme un cycle C' avec les arêtes de $\{a_1, \dots, a_{i-1}\}$; mais a est une arête de T_1 , ainsi que $a_1, \dots, a_{i-1}$, donc C' serait un cycle de T_1 : absurde. Cela entraîne que $\omega(T_2) \leq \omega(T_1)$.

On peut répéter cette construction à partir de T_2 , puis ainsi de suite jusqu'à l'arrêt du processus qui fournit l'arbre $T_r = T$. On a donc transformé T_1 en T en remplaçant les arêtes une par une de telle sorte que le poids total à chaque étape ne soit pas augmenté. Par conséquent $\omega(T) \leq \omega(T_1)$.

Calcul de la complexité : nous avons besoin d'un tableau `compconnexe` qui va nous donner le numéro de la composante connexe auquel appartient le sommet courant (c'est-à-dire le sommet qui est en train d'être examiné). Soit $V = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. On commence par initialiser :

`compconnexe[i] ← i` où i est le numéro du sommet x_i . Soit $e = \{i, j\}$ l'arête courante (c'est-à-dire l'arête qui est en train d'être examinée).

Si `compconnexe[i] < compconnexe[j]` alors le tableau `compconnexe` est modifié en remplaçant toutes les entrées égales à `compconnexe[j]` par `compconnexe[i]`; à la fin on a `compconnexe[i] = 1` pour tout i car tout sommet doit appartenir à la même composante connexe.

Il est bien connu que trier une liste de taille $|E|$ peut se faire en $O(|E| \log(|E|))$ opérations élémentaires.

Dans le pire des cas on obtient un arbre quand on adjoint la $m^{\text{ième}}$ arête. Pour chaque arête $\{i, j\}$ ajoutée, on compare $\text{compconnexe}[i]$ à $\text{compconnexe}[j]$ et on met à jour le tableau **compconnexe** selon la règle décrite ci-dessus. On a donc au pire $|V|$ comparaisons et les mises à jour relatives au suivi des composantes connexes requièrent $O(|V| \log |V|)$ opérations tout au long de l'algorithme. Comme Γ est connexe, $|V| = O(|E|)$ et on obtient une complexité en $O(|E| \log(|E|))$. $\square$

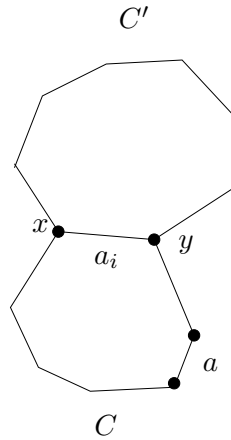


Figure 2.4 – Illustration dans la preuve de l'algorithme de KRUSKAL.

Remarque 2.2.8. L'algorithme de KRUSKAL peut fournir plusieurs arbres de recouvrement de poids minimum, lorsqu'on modifie l'ordre des arêtes de même poids. Cependant tous ces arbres de recouvrement auront le même poids (minimum).

2.2.2 Arborescences

Une **arborescence** est un digraphe simple $\vec{\Gamma} = (V; \vec{E})$ vérifiant les conditions suivantes :

- le graphe sous-jacent est un arbre ;
- il existe un sommet de degré entrant 0 et tout autre sommet a un degré entrant égal à 1.

Le sommet qui a un degré entrant égal à 0 est appelé la **racine** de l'arborescence.

Soit $\Gamma = (V; \vec{E})$ un digraphe dont le graphe sous-jacent a $k \geq 1$ composantes connexes. Le digraphe $\Gamma = (V; \vec{E})$ est une **forêt orientée** si les composantes connexes du graphe sous-jacent sont des arborescences. Un digraphe partiel d'un digraphe $\Gamma = (V; \vec{E})$ qui est une arborescence est appelé **arborescence recouvrante**.

Proposition 2.2.9. *Soit $\Gamma = (V; E)$ un arbre d'ordre fini : pour tout sommet r de Γ , il existe une orientation telle que Γ soit une arborescence de racine r .*

Démonstration. Raisonnons par récurrence sur le nombre d'arêtes.

Si $|E| = 0$ la propriété est triviale. Si $|E| = 1$, l'arbre a une arête $a = \{r, y\}$: on peut orienter cette arête de telle sorte que r soit la racine.

Supposons la propriété vraie pour tout arbre ayant $m - 1$ arêtes. Soit $\Gamma = (V; E)$ un arbre ayant m arêtes ; le sommet r n'étant pas isolé, il existe une arête $a = \{r, y\}$ incidente à r ; si on retire a , on obtient deux composantes connexes (voir le ii du théorème 2.2.1) qui sont des arbres Γ_r et Γ_y .

On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à chacun de ces deux arbres. on peut donc orienter Γ_r et Γ_y de telle sorte que leurs racines respectives soient r et y . Ensuite, on oriente l'arête a de r vers y : on obtient une arborescence de racine r car tous les sommets de Γ ont un degré entrant égal à 1 à l'exception de r qui a un degré entrant égal à 0. $\square$

Nous disposons aussi de la propriété suivante :

Proposition 2.2.10. *Soit $\Gamma = (V; \vec{E})$ une arborescence et x un sommet. le sous-digraphe Γ_x induit par*

$$V_x = \{y \in V : \text{il existe un chemin de } x \text{ à } y\}$$

est une arborescence.

Démonstration. Il est clair que le graphe sous-jacent à Γ_x est un arbre. Par définition tous les sommets, à l'exception de x , sont de degré entrant égal à 1 ; $d^-(x) = 0$. D'où le résultat. $\square$

L'arborescence Γ_x est appelée **arborescence attachée à x** .

Soit $\Gamma = (V; \vec{E})$ une arborescence de racine r : si $a = (x, y) \in \vec{E}$ on dit que x est **père** de y et que y est **fil**s de x ; deux sommets ayant même père sont des **frères**. Un sommet ayant au moins un fils est dit

interne ; une **branche** de $x \in V$ est un chemin partant de x et allant jusqu'à une feuille.

La **hauteur** d'un sommet x est la longueur du plus grand chemin partant de x et allant à une feuille ; la **hauteur d'une arborescence** est la hauteur de sa racine ; la **profondeur** d'un sommet x est la longueur de l'unique chemin de la racine à x : d'après le théorème 2.1.2, il existe une unique chaîne entre r et $x_n = x$:

$$C = (r, a_0, x_1, a_1, x_2, \dots, a_{n-1}, x_n).$$

Comme Γ est une arborescence, le degré entrant de x_1 est égal à 1, donc l'arête orientée correspondant à a_0 va de r à x_1 et de même pour les autres a_i ; ainsi C fournit en réalité un chemin de r à x .

Un **niveau** dans une arborescence est l'ensemble de tous les sommets qui sont à une même profondeur.

Une **arborescence ordonnée** est une arborescence dans laquelle on a ordonné totalement l'ensemble des fils de chaque sommet : on peut la dessiner sur un plan en ordonnant les fils d'un sommet de gauche à droite (voir figure 2.5). Une arborescence ordonnée est une **arborescence binaire complète** si tout sommet a soit deux fils soit aucun.

Exercice 2.2. Montrer que le nombre de sommets dans une arborescence binaire complète est impair.

Une arborescence binaire complète est **parfaite** si toutes les feuilles sont à une même profondeur et si tout sommet qui n'est pas une feuille a exactement deux fils.

Proposition 2.2.11. *Une arborescence binaire parfaite de hauteur h possède $2^{h+1} - 1$ sommets.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur la hauteur. Si $h = 0$, on a $n = 1$.

Supposons la propriété vraie pour toute arborescence binaire parfaite de hauteur h . Soit $\mathcal{T}$ une arborescence binaire parfaite de hauteur $h + 1$. En supprimant la racine, on obtient deux arborescences (d'après la proposition 2.2.10). De plus, celles-ci sont parfaites. Elles ont toutes deux une hauteur égale à h et, par conséquent, elles possèdent chacune $2^{h+1} - 1$ sommets. Nous avons donc dans $\mathcal{T}$ exactement $2(2^{h+1} - 1) + 1 = 2^{h+2} - 1$ sommets. $\square$

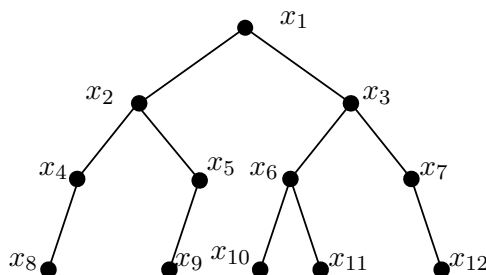


Figure 2.5 – Arbre ordonné.

Cette arborescence n'est pas parfaite car, par exemple, le sommet x_4 n'a qu'un fils. La hauteur de l'arborescence est égale à 3.

2.3 Digraphes sans circuit

Les digraphes sans circuit sont très importants dans les applications à l'ordonnancement. Par exemple on les retrouve dans la planification de travaux.

Soit $\vec{\Gamma} = (V; \vec{E})$ un digraphe simple sans circuit ; un **tri topologique** est une injection f de V dans $\mathbb{R}$ telle que si $a = (x, y)$ est un arc alors $f(x) < f(y)$; lorsque Γ est d'ordre fini cela revient à donner un ordre total sur les sommets $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ satisfaisant à

$$(x_i, x_j) \in \vec{E} \implies i < j.$$

Lemme 2.3.1. *Soit $\Gamma = (V; \vec{E})$ un digraphe simple d'ordre fini sans circuit ; alors Γ contient au moins un sommet x de degré entrant égal à 0, c'est-à-dire $d^-(x) = 0$.*

Démonstration. Soit x_1 un élément de V . Si $d^-(x_1) = 0$, c'est fini. Sinon il existe un sommet x_2 tel que (x_2, x_1) soit un arc. Si $d^-(x_2) = 0$, c'est fini. Sinon il existe x_3 tel que (x_3, x_2) soit un arc et ainsi de suite. Le digraphe étant fini et celui-ci n'ayant pas de circuit, on obtient de cette manière nécessairement un sommet x_k tel $d^-(x_k) = 0$. $\square$

Proposition 2.3.2. *Soit $\Gamma = (V; \vec{E})$ un digraphe simple d'ordre fini. Il est sans circuit si et seulement si l'ensemble de ses sommets admet un tri topologique.*

Démonstration. Nécessité : soit Γ un digraphe simple sans circuit ; raisonnons par récurrence sur le nombre de sommets. Si $|V| = 1$ c'est trivial.

Supposons le résultat vrai jusqu'au rang n . Soit Γ tel que $|V(\Gamma)| = n + 1$; d'après le lemme 2.3.1, le digraphe admet un sommet u tel que $d^-(u) = 0$; supprimons ce sommet : le digraphe Γ_u induit sur $V \setminus \{u\}$ étant sans circuit et d'ordre n , il admet un tri topologique : $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Le sommet u ayant un degré entrant égal à 0, on obtient un tri topologique sur V en posant $u < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ (les seuls arcs où intervient u étant du type (u, x_i)).

Suffisance : supposons réciproquement que Γ admette un tri topologique f et que ce digraphe ait un circuit

$$(x_0, a_0, x_1, a_1, x_2, \dots, x_t, a_t, x_0)$$

Alors nous avons : $f(x_0) < f(x_1) < \dots < f(x_t) < f(x_0)$, absurde. $\square$

Soit $\Gamma = (V; \vec{E})$ un digraphe simple avec $|V| = n$. La procédure suivante vérifie si le digraphe est avec ou sans circuit et détermine un tri topologique sur ses sommets.

Tri topologique

Entrée : Γ ; $A_{x_1}, A_{x_2}, \dots, A_{x_n}$; (un graphe et une liste d'arcs)

Sortie : s ; (variable booléenne indiquant si Γ est sans circuit ou non)

Sortie : $\text{entrd}(x)$, $\text{listopo}(y)$; (degré entrant du sommet x , numéro du sommet dans le tri topologique).

Initialisation : $V = 1$; (nombre de sommets traités)

Initialisation : $L = \emptyset$; (liste de sommets ayant $d^-(x) = 0$)

Pour Tout i de 1 à n **Faire**

$\text{entrd}(x_i) = 0$;

Fin Pour

Pour Tout i de 1 à n **Faire**

Pour Tout, $x_j \in A_{x_i}$ **Faire**

$\text{entrd}(x_j) = \text{entrd}(x_j) + 1$;

Fin Pour

Fin Pour

Pour Tout i de 1 à n **Faire**

Si $\text{entrd}(x_i) == 0$ **Alors**

Ajouter x_i à L ;

Fin Si

Fin Pour

Tant que L n'est pas vide **Faire**

Enlever le premier sommet y de L ;

$\text{listopo}(y) = V$;

```
V = V + 1 ;
Pour Tout  $u \in A_y$  Faire
    entrd( $u$ ) = entrd( $u$ ) - 1 ;
    Si entrd( $u$ ) == 0 Alors
        Ajouter  $u$  à  $L$  ;
    Fin Si
Fin Pour
Fin Tant
Si  $V == n + 1$  Alors
     $s = \text{vrai}$  ;
Sinon
     $s = \text{faux}$  ;
fin Si
Fin
```

Théorème 2.3.3. *L'algorithme **Tri topologique** détermine si un digraphe simple $\Gamma = (V; \vec{E})$ est sans circuit ou non. Il construit un tri topologique sur les sommets en $O(|V| + |\vec{E}|)$, si le graphe sous-jacent à Γ est connexe.*

Démonstration. Il est clair que cet algorithme teste si le digraphe Γ est sans circuit tout en donnant la liste des sommets triés « de manière topologique ».

La première boucle d'initialisation **Pour** se fait en $O(|V|)$ et la deuxième se fait en $O(|\vec{E}|)$ car le digraphe est représenté par une liste d'arcs qui est parcourue exactement une fois. La construction de L se fait également en $O(|V|)$. Par conséquent ces initialisations se font en $O(|V| + |\vec{E}|)$. Dans la boucle **Tant que** tous les arcs seront parcourus au plus une fois. Donc la complexité de cet algorithme est en $O(|V| + |\vec{E}|)$. $\square$

2.4 Graphes eulériens et graphes hamiltoniens

2.4.1 Graphes eulériens

Quand on étudie la théorie des graphes, il y a au moins une histoire à laquelle on ne peut pas échapper. Ce livre ne coupera pas à la tradition. Si un jour vous vous promenez à KALININGRAD (anciennement KÖNIGSBERG en PRUSSE), peut-être remarquerez vous que cette ville possède sept ponts. Peut-être également vous poserez-vous la question suivante : est-ce que je peux partir d'un quartier de la ville, traverser exactement

une fois tous les ponts et revenir à mon point de départ ?

Si c'est le cas sachez qu'un célèbre mathématicien du XVIII^e siècle s'est déjà posé cette question : il s'agit de Leonhard EULER (1707–1783). Vous trouverez la réponse ci-dessous.

Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe connexe d'ordre fini ; un cycle de Γ est dit **eulérien** s'il passe par toutes les *arêtes* de Γ exactement une fois ; le graphe Γ est **eulérien** s'il contient un cycle eulérien ; par exemple, la figure 2.6 montre un graphe eulérien.

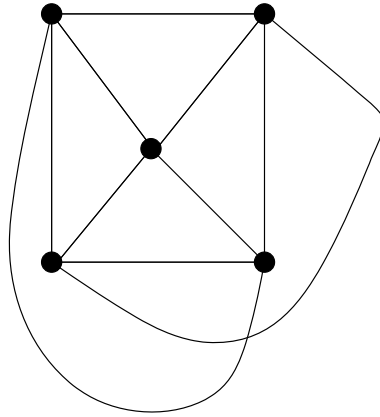


Figure 2.6 – Un graphe eulérien.

Une chaîne est **eulérienne** si elle est simple et si elle contient toutes les arêtes de Γ ; le graphe est **semi-eulérien** s'il contient une chaîne eulérienne.

Il existe une caractérisation très simple des graphes eulériens et semi-eulériens qui repose sur des propriétés de parité des degrés des sommets. Rappelons que (voir § 1.1.3) le **graphe sous-jacent à une chaîne C** du graphe Γ désigne le sous-graphe dont les sommets et les arêtes sont ceux et celles apparaissant dans C .

Lemme 2.4.1. *Soient $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe d'ordre fini et C une chaîne simple de Γ . Alors dans le graphe sous-jacent à C , tous les sommets sont de degré pair, sauf les extrémités de C (quand elles sont distinctes) qui sont de degré impair.*

Démonstration. Ce résultat semble intuitivement évident, mais la preuve est un peu plus compliquée. On raisonne par récurrence sur le nombre

n d'arêtes de la chaîne. Pour $n = 1$, on a soit une boucle : 1 sommet de degré 2, soit une arête simple : 2 sommets de degré 1.

Supposons le résultat vrai jusqu'à n et soit C une chaîne à $n + 1$ arêtes :

$$C = (x_0, a_0, x_1, \dots, x_n, a_n, x_{n+1}) ;$$

on enlève a_n et x_{n+1} de C , induisant une chaîne C' à n arêtes. Nous distinguons deux cas et utilisons l'hypothèse de récurrence :

- i) si $x_n \neq x_0$ alors $d_{C'}(x_0)$, $d_{C'}(x_n)$ sont impairs et les $d_{C'}(x_i)$, $1 \leq i \leq n - 1$ sont pairs ($d_{C'}$ désigne le degré dans le sous-graphe C') :
 - si $x_{n+1} \notin \{x_0, \dots, x_n\}$, alors $d_C(x_n)$ devient pair, $d_C(x_{n+1})$ vaut 1 et $d_C(x_i) = d_{C'}(x_i)$ pour les autres sommets,
 - si $x_{n+1} = x_j$ pour un $j \neq 0$, alors $d_C(x_j)$ devient impair, $d_C(x_n)$ devient pair, les autres degrés sont inchangés,
 - si $x_{n+1} = x_0$, tous les sommets de la chaîne C sont de degré pair ;
- ii) si $x_n = x_0$ alors tous les sommets de la chaîne C' sont de degré pair :
 - si $x_{n+1} \notin \{x_0, \dots, x_n\}$ alors $d_C(x_0)$ devient impair, $d_C(x_{n+1}) = 1$, les autres degrés ne changent pas,
 - si $x_{n+1} = x_j$, pour un certain $0 \leq j \leq n$, alors $d_C(x_{n+1}) = d_{C'}(x_i) + 1$ est impair, $d_C(x_n) = d_{C'}(x_n) + 1$ est pair, les autres degrés sont inchangés.

Dans tous les cas on constate que la condition de parité pour les degrés des sommets de C est satisfaite. $\square$

Théorème 2.4.2 (EULER, 1736). *Un graphe connexe d'ordre fini $\Gamma = (V; E, N)$ est eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.*

Démonstration. Nécessité : si le graphe est eulérien, les degrés sont pairs d'après le lemme 2.4.1.

Suffisance : supposons que les degrés des sommets du graphe soient pairs. On considère l'ensemble $\mathcal{S}$ des chaînes simples

$$C = (x_0, a_0, x_1, a_1, x_2, \dots, x_{k-1}, a_{k-1}, x_k)$$

ordonnées de façon naturelle : $C \leq C'$ si C est un sous-graphe de C' ; comme $\mathcal{S}$ est fini, il possède au moins un élément maximal (voir § 1.10) C'' :

$$C'' = (x_0, a_0, x_1, a_1, x_2, \dots, x_n, a_n, x_{n+1}).$$

Le degré de x_{n+1} est pair par hypothèse et non nul (a_n est incidente à x_{n+1}) donc il existe une autre arête a incidente à x_{n+1} ; on a nécessairement $a \in \{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\}$ car sinon, on contredirait la maximalité de

C'' en ajoutant a à la chaîne ; pour cette même raison **toutes** les arêtes incidentes à x_{n+1} sont dans $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$, donc le degré de x_{n+1} dans le graphe sous-jacent à C'' est le même que dans le graphe Γ et ce degré est pair. Par conséquent, d'après le lemme 2.4.1, on a : $x_{n+1} = x_0$ et C'' est un cycle. Ce cycle est eulérien, car sinon il existerait une autre arête $a \notin \{a_0, \dots, a_n\}$ incidente à un sommet du cycle (car le graphe est connexe) : $a = ([y, x_i], k)$. Mais alors la chaîne

$$(y, a, x_i, a_i, \dots, x_n, a_n, x_{n+1}, x_0, a_0, x_1, a_1, \dots, x_{i-1}, a_{i-1}, x_i)$$

est une chaîne simple et elle est plus grande que C'' , contradiction. $\square$

Ainsi le graphe biparti $K_{n,n}$ est eulérien si et seulement si n est pair.

Corollaire 2.4.3. *Le graphe Γ est semi-eulérien si et seulement s'il n'a aucun sommet de degré impair ou bien deux sommets de degré impair.*

Démonstration. Nécessité : si le graphe est semi-eulérien, le lemme 2.4.1 donne le résultat.

Suffisance : s'il a zéro sommet de degré impair, d'après le théorème 2.4.2 le graphe est eulérien. S'il a 2 sommets x et y de degré impair, on rajoute une arête a entre x et y auquel cas le degré de x et celui de y deviennent pairs. Le graphe Γ' obtenu a tous ses sommets de degré pair, donc est eulérien d'après le théorème 2.4.2 ; il existe un cycle eulérien de Γ' que l'on peut écrire :

$$(x, a_0, x_1, \dots, x_{n-1}, a_{n-1}, y, a, x)$$

Par conséquent, C passe exactement une et une seule fois par toutes les arêtes du graphe Γ' . Maintenant on retire a de ce cycle, on obtient une chaîne simple

$$(x, a_0, x_1, \dots, x_{n-1}, a_{n-1}, y)$$

qui passe exactement une et une seule fois par toutes les arêtes de Γ . Cette chaîne entre x et y est donc eulérienne dans Γ qui est donc semi-eulérien. $\square$

Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.4.4. *Tout cycle C dans un graphe $\Gamma = (V; E, N)$ d'ordre fini peut se décomposer en cycles élémentaires $C_1, \dots, C_k$ arête-disjoints : $E(C) = \bigsqcup_{i=1}^k E(C_i)$.*

Démonstration. On procède par récurrence sur la longueur du cycle. Si le cycle est une boucle, c'est un cycle élémentaire. Supposons que tout cycle de longueur inférieure ou égale à $n - 1$ se décompose en cycles élémentaires arête-disjoints. Soit C un cycle de longueur n . Si aucun sommet de C n'est répété, C est élémentaire et le résultat est prouvé. Sinon, considérons x_i le premier sommet de C traversé au moins deux fois par C . On pose $j = \min\{k > i : x_k = x_i\}$. Les deux cycles C_1 et C_2 inscrits dans C allant pour le premier de x_i à x_j (deuxième occurrence de x_i comme sommet de C) et de x_j à x_i pour le second sont de longueur strictement inférieure à n . L'hypothèse de récurrence permet de décomposer ces deux cycles en cycles élémentaires arête-disjoints. C_1 et C_2 sont sans arête commune, car C est simple. La réunion des décompositions de C_1 et C_2 en cycles élémentaires arête-disjoints forme donc une décomposition de C en cycles élémentaires arête-disjoints. $\square$

Dans un cycle eulérien il peut y avoir des multi-arêtes. Cependant on montre le corollaire suivant.

Corollaire 2.4.5. *Un graphe $\Gamma = (V; E, N)$ connexe d'ordre fini est eulérien si et seulement si l'ensemble de ses arêtes peut être partitionné en cycles élémentaires arête-disjoints.*

Démonstration. Si le graphe est eulérien, il a un cycle élémentaire $C : E(C) = E$; par le lemme 2.4.4, on a le résultat.

Réciproquement, soit C un cycle élémentaire de la partition; si C contient toutes les arêtes, c'est fini. Sinon il existe un autre cycle C' ayant un sommet x en commun avec C (le graphe étant connexe). Mais alors, C et C' étant arête-disjoints, la concaténation de C et C' forme un cycle C'' . Si C'' contient toutes les arêtes, c'est fini, sinon on recommence autant de fois que nécessaire jusqu'à épuisement des cycles élémentaires. $\square$

Un **digraphe eulérien** est un digraphe contenant un circuit eulérien, c'est-à-dire un circuit passant par tous les arcs exactement une fois. Un **digraphe semi-eulérien** est un digraphe contenant un chemin semi-eulérien, c'est-à-dire un chemin passant par tous les arcs exactement une fois. Un digraphe $\Gamma = (V; \vec{E})$ est **pseudo-symétrique** si pour tout sommet $x \in V$ on a :

$$d^-(x) = d^+(x).$$

On établit le théorème suivant :

Théorème 2.4.6. Soit $\Gamma = (V; \vec{E})$ un digraphe dont le graphe sous-jacent est connexe. Alors Γ est eulérien si et seulement s'il est pseudo-symétrique.

Démonstration. Elle est laissée au lecteur à titre d'exercice : il faut aménager le lemme 2.4.1 en précisant les degrés entrants et sortants dans un chemin ; ensuite la preuve est semblable à celle du théorème 2.4.2. $\square$

2.4.2 Graphes hamiltoniens

Nous avons étudié les graphes possédant un cycle eulérien. Le problème « dual » est de savoir si un graphe d'ordre fini contient un cycle élémentaire passant par tous les sommets (et pas forcément par toutes les arêtes). Un tel cycle est appelé cycle **hamiltonien**. Sir William HAMILTON a proposé en 1859 le jeu suivant.

On considère un dodécaèdre. Les sommets de celui-ci sont des villes du monde. L'objectif du jeu, appelé *Autour du monde*, est de partir d'une ville, de visiter exactement une fois toutes les autres villes en suivant les arêtes du dodécaèdre et de revenir à la ville de départ. Cela revient à trouver un cycle hamiltonien dans un graphe. On dira donc qu'un graphe est **hamiltonien** s'il possède un cycle hamiltonien ; par exemple K_n et C_n .

De même, un graphe (d'ordre fini) est **semi-hamiltonien** s'il existe une chaîne élémentaire passant par tous les sommets du graphe. Cette chaîne est appelée chaîne **hamiltonienne**.

Il est étrange de constater que trouver un cycle hamiltonien ou une chaîne hamiltonienne (problèmes très proches des problèmes eulériens) est beaucoup plus difficile ! Actuellement il n'existe pas de caractérisation simple des graphes hamiltoniens. En fait ce problème appartient à la classe $\mathcal{NPC}$.

Le problème de la marche d'un cavalier sur un échiquier, proposé par EULER, consiste à trouver un cycle hamiltonien sur le graphe $\Gamma = (V; E)$ où V est l'ensemble des $8 \times 8 = 64$ cases de l'échiquier et où les voisins d'un sommet $v \in V$ sont les 8 cases de la « rosace » du cavalier (réduite lorsque v est proche du bord de l'échiquier) ; EULER a lui-même indiqué une stratégie pour obtenir un tel cycle : on part d'un coin de l'échiquier et on parcourt avec le cavalier le plus possible de cases en restant près du bord puis on va petit à petit vers le centre ; lorsqu'on ne peut plus jouer, il reste quelques cases à atteindre ; EULER donne un procédé (parcours inversé) pour modifier le trajet et atteindre une case manquante et ainsi par tâtonnement on finit par obtenir un cycle hamiltonien.

Il est naturel de penser que plus le nombre d'arêtes est grand par rapport au nombre de sommets, plus le graphe a de chances d'être hamiltonien : c'est un peu le sens des résultats suivants. Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe d'ordre fini ; on appellera **clôture** de Γ , notée $\text{Cl}(\Gamma)$, le graphe ayant les mêmes sommets que Γ : $V(\text{Cl}(\Gamma)) = V(\Gamma)$; les arêtes sont ainsi définies : posons $n = |V|$; on souhaite que $\text{Cl}(\Gamma)$ vérifie la propriété suivante :

si $x, y \in V(\text{Cl}(\Gamma)) = V(\Gamma)$ ne sont pas adjacents, alors $d(x) + d(y) < n$;

pour cela on considère toutes les paires $\{x, y\}$ de sommets non adjacents pour lesquels $d(x) + d(y) \geq n$ et on ajoute une arête $a = (\{x, y\}, 1)$. Pour distinguer les arêtes ajoutées on suppose que $1 \notin N$.

Proposition 2.4.7. *Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe connexe sans boucle avec $|V| = n \geq 3$. Le graphe Γ est hamiltonien si et seulement si $\text{Cl}(\Gamma)$ est hamiltonien.*

Démonstration. Il est clair que si Γ est hamiltonien alors $\text{Cl}(\Gamma)$ est également hamiltonien (on a rajouté des arêtes, pas de sommet). Supposons maintenant que $\text{Cl}(\Gamma)$ soit hamiltonien : $\text{Cl}(\Gamma)$ est obtenu en ajoutant m' arêtes simples, que l'on peut noter $e_k = (\{x_k, y_k\}, 1)$, $1 \leq k \leq m'$, fournissant des graphes successifs

$$\begin{aligned} \Gamma_k &= (V; E_k, N \cup \{1\}), \quad E_k = E_{k-1} \cup \{e_k\}, \quad 1 \leq k \leq m', \\ E &= E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_k \subset \dots \subset E_{m'} \text{ et } \Gamma_{m'} = \text{Cl}(\Gamma). \end{aligned}$$

Soit C un cycle hamiltonien de $\text{Cl}(\Gamma)$; il emprunte l'arête $e_{m'}$, on peut donc l'écrire

$$C = (t_0, a_0, t_1, a_1, \dots, a_{n-2}, t_{n-1}, a_{n-1}, t_n) \text{ avec } t_n = t_0,$$

où $V = \{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}\}$, $x_{m'} = t_0$, $y_{m'} = t_{n-1}$, $a_{n-1} = e_{m'} = \{x_{m'}, y_{m'}\}$. Par construction, dans $\Gamma_{m'-1}$, les sommets $x_{m'}$ et $y_{m'}$ ne sont pas adjacents, donc $d(x_{m'}) + d(y_{m'}) \geq n$.

Considérons les ensembles d'indices

$$\begin{aligned} I &= \{i : t_i \text{ adjacent à } x_{m'} \text{ dans } \Gamma_{m'-1}\}, \\ J &= \{j : t_{j-1} \text{ adjacent à } y_{m'} \text{ dans } \Gamma_{m'-1}\}. \end{aligned}$$

Comme le graphe est sans boucle, on a $0 \notin I$. Comme $x_{m'}$ n'est pas adjacent à $y_{m'} = t_{n-1}$ dans $\Gamma_{m'-1}$, on a $I \subset \{1, \dots, n-2\}$ et $J \subset \{2, \dots, n-1\}$ (se rappeler que $n \geq 3$), de sorte que l'on a

- $I \cup J \subset \{1, \dots, n-1\}$, donc $|I \cup J| \leq n-1$,
- $|I| + |J| = d(x_{m'}) + d(y_{m'}) \geq n$.

Il en résulte que $I \cap J \neq \emptyset$. Soit $l \in I \cap J$; t_{l-1} est adjacent à $y_{m'}$, t_l est adjacent à $x_{m'}$ (dans Γ_{m-1}) et $\{t_{l-1}, t_l\}$ est une arête de C . Alors le cycle

$$C' = (t_0, a_0, t_1, \dots, a_{l-2}, t_{l-1}, \{t_{l-1}, y_{m'}\}, y_{m'}, a_{n-2}, t_{n-2}, \dots, a_{l+1}, t_{l+1}, a_l, t_l, \{t_l, x_{m'}\})$$

avec $x_{m'} = t_0$, est hamiltonien dans $\Gamma_{m'-1}$ (voir figure 2.7).

On applique la construction précédente à partir de $\Gamma_{m'-1}$; on obtient de manière analogue que $\Gamma_{m'-2}$ contient un cycle hamiltonien. De proche en proche, on obtient finalement un cycle hamiltonien dans Γ . $\square$

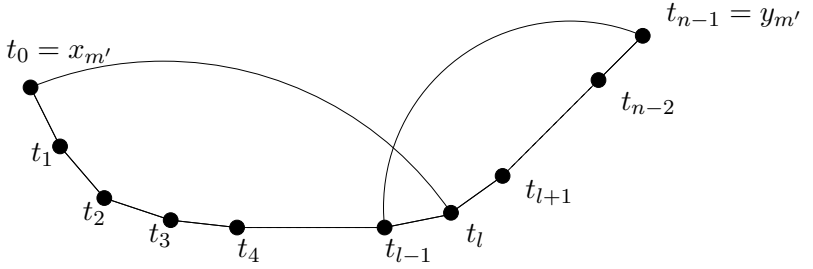


Figure 2.7 – Représentation du cycle obtenu dans la preuve de la proposition 2.4.7.

On a $a_0 = \{t_0, t_1\}, \dots, a_{l-1} = \{t_{l-1}, t_l\}, \dots, a_{n-2} = \{t_{n-2}, t_{n-1}\}$.

On en déduit le théorème suivant, démontré par Ø. ORE.

Théorème 2.4.8 (ORE, 1961). *Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe connexe avec $|V| = n \geq 3$. Si pour toute paire de sommets non adjacents, on a $d(x) + d(y) \geq n$, alors le graphe est hamiltonien.*

Démonstration. D'après les hypothèses, la clôture $\text{Cl}(\Gamma)$ de Γ est un graphe complet, donc elle est hamiltonienne. En appliquant la proposition 2.4.7, on obtient le résultat. $\square$

Ce théorème généralise le résultat antérieur, dû à G.A. DIRAC.

Corollaire 2.4.9 (DIRAC, 1952). *Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe connexe avec $|V| = n \geq 3$. Si $d(x) \geq n/2$ pour tout sommet x , alors le graphe est hamiltonien.*

Démonstration. En effet si $d(x) \geq n/2$ pour tout $x \in V$, alors pour toute paire de sommets (adjacents ou non), on a $d(x) + d(y) \geq n$; d'après le théorème 2.4.8, cela implique que le graphe est hamiltonien. $\square$

Il est malheureusement en général très difficile de décider si la clôture d'un graphe est hamiltonienne!

Il existe également une notion de digraphe hamiltonien. Un **digraphe hamiltonien** est un digraphe contenant un **circuit hamiltonien**, c'est-à-dire un circuit qui passe exactement une fois par chaque sommet. Un **digraphe semi-hamiltonien** est un digraphe contenant un **chemin hamiltonien**, c'est-à-dire un chemin qui passe exactement une fois par chaque sommet. Il existe des conditions suffisantes sous lesquelles un digraphe est hamiltonien (respectivement semi-hamiltonien). Voici un résultat dans le même esprit que celui de DIRAC ci-dessus.

Théorème 2.4.10 (WOODALL, 1972). *Soit $\Gamma = (V; \overrightarrow{E}, N)$ un digraphe d'ordre fini dont le graphe sous-jacent est connexe avec $|V| = n$. Si $d^-(x) \geq n/2$ et $d^+(x) \geq n/2$ pour tout sommet $x \in V$, alors le digraphe est hamiltonien.*

La preuve de ce résultat est admise; elle est longue³ et difficile. On notera que le théorème 2.4.10 contient le résultat de DIRAC.

Exercice 2.3. Montrer qu'un graphe $\Gamma = (V; E)$ ayant n sommets et m arêtes où

$$m \geq \frac{1}{2}(n-1)(n-2) + 2$$

est hamiltonien.

Indication : on supposera que le graphe n'est pas hamiltonien et on appliquera le théorème 2.4.8; on rappelle que dans un graphe simple le nombre d'arêtes est au plus $n(n-1)/2$.

Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe simple. Le **line-graphe** ou **graphe représentatif** de Γ est le graphe simple $L(\Gamma) = (V'; E')$ défini ainsi :

- $V' = E$: les sommets de $L(\Gamma)$ sont les arêtes de Γ ;
- si $a, b \in V'$, alors $\{a, b\} \in E'$ si et seulement si les arêtes a et b sont incidentes.

Exercice 2.4. Montrer que si un graphe simple $\Gamma = (V; E)$ est eulérien, alors son line-graphe est eulérien et hamiltonien.

3. Voir D.R. WOODALL, Sufficient conditions for circuits in graphs, *Proc. London Math. Soc.* 24 (1972), 739–755.

Comme application des graphes hamiltoniens, citons le célèbre **problème du voyageur de commerce**.

Un voyageur de commerce doit visiter plusieurs villes et revenir à sa ville de départ en un nombre minimum de kilomètres. Ce problème peut se formuler en terme de réseau. En effet, soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe dont les sommets sont les villes à visiter, chaque arête étant une route entre deux villes. On définit une valuation ω sur les arêtes de Γ qui donne la distance entre deux villes. Le problème revient à trouver un cycle hamiltonien de plus petit poids possible.

PETIT LEXIQUE FRANÇAIS – ANGLAIS

sommet	vertex
arête	edge
maille	girth
boucle	loop
graphe induit	induced subgraph
graphe partiel	spanning subgraph
arbre	tree
graphe orienté	directed graph
line-graphe	line-graph
racine	root
arc	arc
chemin	path



Chapitre 3

(Di)graphes et structures de données

L'algorithmique a pour objet la conception, l'évaluation et l'optimisation de méthodes de calcul permettant de trouver une solution à un problème donné. L'essentiel des traitements informatiques consiste à manipuler des données. Il est donc indispensable de les organiser de manière efficace. Les structures de données provenant des (di)graphes permettent le développement d'algorithmes simples et élégants.

Les listes et les piles sont des structures dynamiques unidimensionnelles qui sont vues comme des graphes particuliers : chaque élément a un seul fils (éventuellement vide). En généralisant ces structures dynamiques au cas multidimensionnel, on obtient des arbres et des arborescences qui sont très pratiques pour structurer les données :

- un livre est élaboré en chapitres qui sont eux-mêmes décomposés en sections, elles-mêmes structurées en paragraphes ;
- une expression arithmétique peut être vue comme un arbre : les feuilles sont les variables et les autres sommets sont les opérateurs ;
- l'organigramme d'une entreprise est généralement arborescente ;
- l'organisation des fichiers Unix ou Linux présente une structure d'arbre...

La plupart des définitions et des algorithmes reposant sur une représentation arborescente s'écrivent efficacement et naturellement de manière récursive.

Ce chapitre est consacré aux structures de données arborées et arborescentes. On supposera les **graphes simples et finis**.

3.1 Arbres et arborescences : le retour

Les structures d'arbres et d'arborescences permettent de réaliser des opérations dynamiques, comme la recherche de prédécesseur, de successeur, d'un minimum ou d'un maximum. Elles permettent également de réaliser la suppression et l'insertion en un temps proportionnel à la hauteur. Ce sont donc des représentations de données efficaces en informatique.

Dans ce chapitre, les arbres et les arborescences sont supposés ordonnés (voir chapitre 2) et on utilisera indifféremment les termes « arbre » et « arborescence », sauf si on a besoin de distinguer les deux structures ; on confondra un sommet et sa valeur (sa valuation) et on supposera aussi que tous **les paramètres sont passés par référence**.

La plupart des langages de programmation, comme **C**, **C++** ou **Java**, sont des langages typés : cela signifie que le type de chacune des variables utilisées est déclaré au préalable. Par exemple **entier** : n ; **réel** : m ; **caractère** : a ; **chaîne de caractères** : u ; **tableau** (respectivement **chaînes**, **listes**) : $T[\text{max}]$. Les noms des variables déclarées permettent de stocker leurs valeurs dans différents emplacements de la mémoire de la machine en fonction de leur type.

Une **structure** permet de définir de nouveaux types de variables en regroupant sous un même nom plusieurs données, appelées champs, de types éventuellement distincts. La déclaration se fait de la manière suivante :

```
structure nom de la structure {  
    type de champ1 : champ1  
    type de champ2 : champ2  
    type de champ3 : champ3  
    ...  
    :  
}
```

Exemple 3.1.1. On définit la structure « étudiant » comportant quatre champs différents :

```
structure étudiant {  
    chaîne de caractères : nom  
    chaîne de caractères : prénom  
    entier : âge  
    chaîne de caractères : numéro-carte-étudiant  
}
```

Voici comment déclarer une variable de type **étudiant** :

étudiant : E

et voici comment initialiser les champs :

E.nom = “martin”

E.prénom = “marcel”

E.âge = 20

E.numéro-carte-étudiant = 1234

et comment afficher les contenus des différents champs de la variable E :

afficher E.prénom, E.nom, E.âge, E.numéro-carte-étudiant.

Donnons maintenant une nouvelle définition des arborescences : une **arborescence** est définie récursivement de la façon suivante :

- soit elle est vide ;
- soit elle est composée d’un sommet nommé **racine** et d’une suite (éventuellement vide) d’arborescences non vides.

L’orientation est donnée en partant de la racine (voir § 2.2.2) ; cette orientation peut être omise et par suite un **arbre** est simplement une arborescence non orientée. On peut vérifier que cette définition est compatible avec celle donnée au chapitre 2.

3.1.1 Représentation d’un arbre ou d’une arborescence sous forme fils-frère

Chaque sommet a un lien vers son premier fils et un lien vers son frère situé immédiatement après lui. On remarque que le sommet racine peut avoir un frère (leur père est le vide !) et on peut donc de cette manière représenter une forêt (c’est-à-dire un ensemble d’arbres).

```
structure sommet {
    entier ou réel ou chaîne de caractères : valeur
    sommet : fils
    sommet : frère
}
```

```
structure arborescence (ou arbre) {
    sommet : racine
}
```

Observons qu’un arbre ou une arborescence est caractérisé (récursivement) par sa racine. Lorsqu’on appliquera la commande **Retourner**

à un arbre, le résultat obtenu sera l'arbre fabriqué à partir de sa racine.

Rappelons qu'une **feuille** est un sommet de degré égal à 1. La **hauteur** d'un sommet x est la longueur du plus grand chemin (ou chaîne) partant de x et allant à une feuille ; la **hauteur d'une arborescence** ou **d'un arbre** est la hauteur de sa racine ; la **profondeur** d'un sommet x est la longueur de l'unique chemin de la racine à x .

Hauteur d'un arbre

Pour illustrer la notion d'arbre, voici une fonction qui calcule la hauteur d'une arborescence (ou d'un arbre) puis qui affiche la valeur des sommets d'un arbre :

entier : hauteurArborescence(arborescence : A)

Début

Retourner hauteurSommet(A.racine) ;

Fin

entier : hauteurSommet(sommet : cour)

entier : hauteurfils, hauteurfrère ;

Début

Si cour == null **Alors**

Retourner -1 ;

Sinon

 hauteurfils = **hauteurSommet**(cour.fils) ;

 hauteurfrère = **hauteurSommet**(cour.frère) ;

Retourner max(1 + hauteurfils , hauteurfrère) ;

FinSi

Fin

affichageArborescence(arborescence : A)

Début

affichageSommet(A.racine) ;

Fin

affichageSommet(sommet : cour)

Début

Si cour <> null **Alors**

afficher cour.valeur ;

affichageSommet(cour.fils) ;

affichageSommet(cour.frère) ;

FinSi

Fin

Cette procédure suit un **ordre préfixé** : le traitement de chaque sommet s'effectue à la première visite. On suit un **ordre postfixé** lorsque le traitement de chaque sommet a lieu lors de la dernière visite.

Exercice 3.1. Écrire une procédure d'affichage de sommets **affichage-auxiliaire** qui suive l'ordre postfixé.

Feuilles d'un arbre

On peut compter les feuilles d'un arbre de la manière suivante :

entier : compterFeuillesArbre(Arbre : A)

Début

Retourner compterFeuilles(A.racine) ;

Fin

On s'appuie sur la fonction auxiliaire suivante qui détermine si un sommet est une feuille :

booléen : estFeuille(sommet : n)

Début

Si n.fils == null **et** n.frere == null **Alors**

Retourner vrai ;

Sinon

Retourner faux ;

FinSi

Fin

et sur la fonction suivante qui compte les feuilles situées sous un sommet :

entier : compterFeuilles(sommet : cour)

Début

Si cour == null **Alors**

Retourner 0 ;

Sinon

Si estFeuille(cour) == vrai **Alors**

Retourner 1 ;

Sinon

Retourner compterFeuilles(cour.fils) +
compterFeuilles(cour.frère) ;

FinSi

FinSi

Fin

Copie d'un arbre

La procédure suivante est très utile puisqu'elle permet la copie d'une arborescence ou d'un arbre :

arbre : copieArbre(arbre : A)

arbre : temporaire ;

Début

temporaire = nouvelarbre() ; (*création d'un nouvel arbre*)

temporaire.racine = **copieSommet**(A.racine) ;

Retourner temporaire ;

Fin

sommet : copieSommet(sommet : cour)

sommet : n ;

Début

Si cour == null **Alors**

Retourner null ;

Sinon

n = nouveausommet() ; (*création d'un nouveau sommet*)

n.valeur = cour.valeur ;

n.fils = **copieSommet**(cour.fils) ;

n.frère = **copieSommet**(cour.frère) ;

Retourner n ;

FinSi

Fin

3.1.2 Arbres et arborescences binaires

Les **arbres** ou **arborescences binaires** sont des structures particulièrement intéressantes pour représenter un problème de décision ou pour stocker des données de manière efficace. Un arbre binaire est

- soit vide ;
- soit composé d'une racine et de deux sous-arbres : le sous-arbre gauche et le sous-arbre droit.

Dans la pratique on utilise la structure suivante :

```

structure sommet {
    entier ou réel ou chaîne de caractères : valeur
    sommet : gauche (fil gauche)
    sommet : droit (fil droit)
}

structure arborescencebinaire (ou arbrebinaire) {
    sommet : racine
}
    
```

Un niveau dans une arborescence binaire est **rempli** lorsque tous les sommets de ce niveau ont exactement deux fils. Deux arborescences binaires A_1 et A_2 sont **isomorphes** lorsque :

- soit A_1 et A_2 sont vides ;
- soit le sous-arbre gauche de A_1 est isomorphe au sous-arbre gauche de A_2 et le sous-arbre droit de A_1 est isomorphe au sous-arbre droit de A_2 .

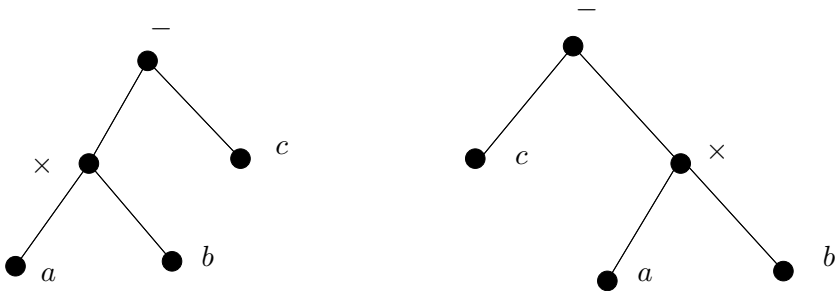


Figure 3.1 – Deux arbres binaires non isomorphes. Ces deux arbres sont cependant isomorphes selon la définition introduite au § 1.9.

Cette définition permet, par exemple, de faire la différence entre les deux expressions $a \times b - c$ et $c - a \times b$ qui sont représentées en figure 3.1 par deux arbres binaires non isomorphes au sens de notre définition.

Isomorphisme

booléen : iso(sommet : n1, sommet : n2)

 Début

 Si n1 == null ou n2 == null Alors

 Retourner n1 == n2 ; (*retourne la valeur de la comparaison*)

 Sinon

 Si n1 <> null et n2 <> null Alors

 Retourner iso(n1.gauche,n2.gauche) et iso(n1.droit,n2.droit) ;

 Sinon

 Retourner faux ;

 FinSi

 FinSi

Fin

booléen : iso(arborescencebinaire : A1, arborescencebinaire : A2)

 Début

 Retourner iso(A1.racine,A2.racine) ;

 Fin

Exercice 3.2. Traduire les procédures vues pour les arborescences générales dans le cas des arborescences binaires.

3.1.3 Arbres et arborescences binaires de recherche

Les arbres binaires sont des structures efficaces pour représenter les données. Néanmoins, pour un arbre binaire quelconque, certaines opérations comme la suppression ou l'insertion d'un élément ne sont pas faciles à effectuer. On introduit, pour améliorer ces opérations, des arbres binaires particuliers. Pour ce faire on va ajouter un ordre sur les sommets. Un **arbre binaire de recherche** est un arbre binaire dont les valeurs des sommets sont ordonnées par un ordre partiel vérifiant la propriété suivante : pour chaque sommet x :

- tous les sommets du sous-arbre gauche de x ont une valeur strictement inférieure à la valuation de x ;
- tous les sommets du sous-arbre droit de x ont une valeur strictement supérieure à la valuation de x .

Trois opérations sont particulièrement pertinentes sur les arbres binaires de recherche : la recherche d'un élément, l'insertion d'un élément et la suppression d'un élément. Un élément désigne ici la valeur que peut

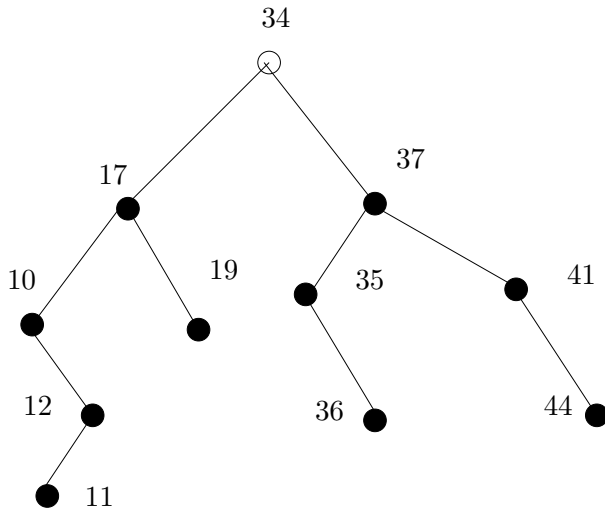


Figure 3.2 – Exemple d'arbre binaire de recherche.

prendre un sommet à savoir généralement un **entier**, un **réel** ou encore une **chaîne de caractères**.

Recherche d'un élément

sommet : rechercheElémentArbre(arbre : A, élément : x)

(retourne l'adresse du sommet contenant l'élément x)

Début

Retourner rechercheElémentSommet(A.racine,x);

Fin

sommet : rechercheElémentSommet(sommet : cour, élément : x)

Début

Si cour == null **ou** cour.valeur == x **Alors**

Retourner cour;

FinSi

Si cour.valeur > x **Alors**

Retourner rechercheElémentSommet(cour.gauche,x);

Sinon

Retourner rechercheElémentSommet(cour.droit,x);

FinSi

Fin

Insertion d'un élément

Les fonctions qui suivent ont pour objet l'insertion d'une nouvelle feuille x dans un arbre binaire de recherche.

arbre : insérer(arbre : A, élément : x)

Début

insérerSommet(A.racine,x);

Retourner A;

(retourne le nouvel arbre après insertion de x)

Fin

insérerSommet(sommet : cour, élément : x)

Début

Si cour.valeur > x **Alors**

Si cour.gauche == null **Alors**

cour.gauche = nouveausommet();

(création d'un nouveau sommet)

cour.gauche.valeur = x;

cour.gauche.gauche = null;

cour.gauche.droit = null;

Sinon

insérerSommet(cour.gauche,x);

FinSi

Sinon

Si cour.droit == null **Alors**

cour.droit = nouveausommet();

cour.droit.valeur = x;

cour.droit.gauche = null;

cour.droit.droit = null;

Sinon

insérerSommet(cour.droit,x);

FinSi

FinSi

Fin

On peut également insérer un élément x à la racine d'un arbre binaire de recherche A de racine r .

Méthode

Pour cela on coupe l'arbre A en deux sous-arbres A_1 et A_2 et on construit un nouvel arbre A' où x est la racine de A' , A_1 est le sous-arbre gauche

de A' et A_2 est le sous-arbre droit de A' . La coupure se fait de la manière suivante :

1. **Si x est strictement inférieur à la valeur de la racine de A ,** alors on coupe le sous-arbre gauche de A en deux sous-arbres A_{11} et A_{12} de telle sorte que toutes les valeurs des sommets de A_{11} soient inférieures ou égales à x et toutes les valeurs des sommets de A_{12} soient supérieures à x .
 - On prend comme sous-arbre gauche de A' , $A_1 = A_{11}$. C'est donc la coupure gauche du fils gauche de A .
 - On prend comme sous-arbre droit de A' l'arbre ayant comme racine r , comme sous-arbre gauche A_{12} et comme sous-arbre droit le sous-arbre droit de A .
2. **Si x est supérieur ou égal à la valeur de la racine de A ,** alors on coupe le sous-arbre droit de A en deux sous-arbres A_{21} et A_{22} de telle sorte que toutes les valeurs des sommets de A_{21} soient inférieures ou égales à x et toutes les valeurs des sommets de A_{22} soient supérieures à x .
 - On prend comme sous-arbre gauche de A' l'arbre ayant comme racine r , comme sous-arbre gauche le sous-arbre gauche de A et comme sous-arbre droit le sous-arbre A_{21} .
 - On prend comme sous-arbre droit de A' , $A_2 = A_{22}$. C'est donc la coupure droite du fils droit de A .

Exercice 3.3. Montrer que la méthode ci-dessus génère une arborescence binaire de recherche.

Algorithme

coupure(sommet : a, sommet : a1, sommet : a2, élément : x)

Début

Si a == null **Alors**

a1 = null ;

a2 = null ;

Sinon

Si x < a.valeur **Alors**

a2 = a ;

coupure(a.gauche,a1,a2.gauche,x) ;

Sinon

a1 = a ;

coupure(a.droit,a1.droit,a2,x) ;

FinSi

FinSi

Fin

Exemple 3.1.2. La figure 3.3 montre un exemple de coupure.

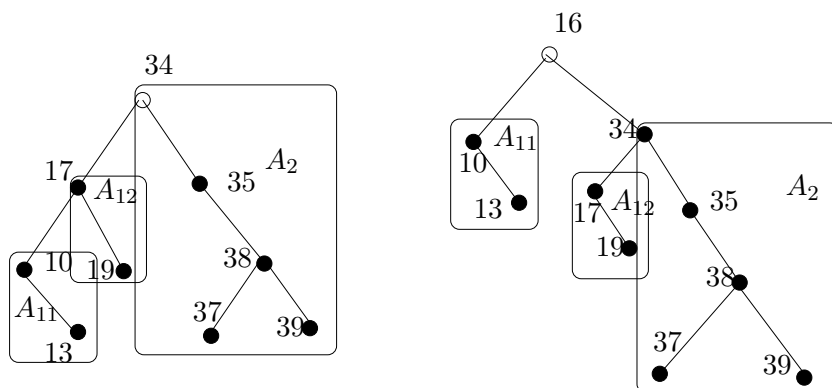


Figure 3.3 – Exemple de coupure : insertion de la valeur 16 à la racine de l'arbre résultat. Comme la valeur 16 est inférieure à la valeur de la racine (34) de l'arbre initial, on coupe le sous-arbre gauche de l'arbre initial en deux sous-arbres : le sous-arbre dont les valeurs sont inférieures ou égales à 16 et le sous-arbre dont les valeurs sont supérieures à 16. On insère 16 à la racine d'un nouvel arbre qui a comme sous-arbre gauche et sous-arbre droit les sous-arbres obtenus selon la méthode décrite plus haut.

La suppression d'un élément est une opération tout aussi importante. Supposons que le sommet n de valeur x existe, alors :

- soit n est une feuille et sa suppression ne nécessite aucune réorganisation ;
- soit n n'a qu'un seul fils, alors on remplace n par ce fils ;
- soit n a deux fils, alors supprimer le sommet t de valeur maximum du sous-arbre gauche de racine n , le mettre à la place de n et remplacer le sommet t par la racine de son sous-arbre gauche.

Exercice 3.4. Montrer que la méthode ci-dessus génère une arborescence binaire de recherche.

Pour appliquer cette méthode, on a besoin de trouver et de supprimer le sommet de valeur maximum dans un arbre binaire de recherche (on suppose que la valeur à supprimer est dans l'arbre).

Suppression

La version qui suit est itérative ; elle est simple à mettre en œuvre.

élément : supprimerMaxArbre(arbre : A) (*renvoie le max de l'arbre A et le supprime*)

```

sommet : tmp, prec ;
élément : max ;
Début
  Si estFeuille(A.racine) Alors
    max = A.racine.valeur ;
    A.racine = null ;
  Sinon
    Si A.racine.droit == null Alors
      max = A.racine.valeur ;
      A.racine = A.racine.gauche ;
    Sinon
      tmp = A.racine ;
      Tant que tmp.droit <> null Faire
        prec = tmp ;
        tmp = tmp.droit ;
      FinTant
      max = tmp.valeur ;
      prec.droit = tmp.gauche ;
    FinSi
  FinSi
  Retourner max ;
Fin

```

La fonction suivante supprime un élément v dans l'arbre A.

supprimerSommet(arbre : A, élément : v)

```

sommet : cour ;
élément : max ;
arbre : tmp ;
Début
  Si A.racine <> null Alors
    cour = A.racine ;
    Tant que cour.valeur <> v faire
      Si v < cour.valeur Alors
        cour = cour.gauche ;
      Sinon
        cour = cour.droit ;
      FinSi
    FinTant

```


Si estFeuille(cour) **Alors**

 cour = null ;

Sinon

Si cour.gauche == null (*il y a un seul fils, le droit*) **Alors**

 cour.valeur = cour.droit.valeur ;

 cour.gauche = cour.droit.gauche ;

 cour.droit = cour.droit.droit ;

(on peut également simplifier ces trois affectations en utilisant : cour = nouveausommet(cour.droit) ;)

Sinon

Si cour.droit == null (*il y a un seul fils, le gauche*) **Alors**

 cour = nouveausommet(cour.gauche) ;

Sinon (*le sommet à supprimer a 2 fils non nuls*)

 tmp.racine = cour.gauche ;

 max = supprimerMaxArbre(tmp) ;

 cour.valeur = max ;

(on a remplacé la valeur à supprimer par le max du sous-arbre gauche)

FinSi

FinSi

FinSi

FinSi

Fin

3.1.4 Arbres et arborescences de priorité, les tas

Un arbre de priorité est un arbre binaire particulier utilisé pour implémenter un type de donnée appelé **file de priorité**. Ces structures sont particulièrement intéressantes dans le cas d'une file d'attente pour un ensemble de processus auxquels sont associées des priorités.

Dans un arbre binaire, la **profondeur** d'un sommet x est la longueur de l'unique chemin de la racine à x et qu'un **niveau** dans une arborescence est l'ensemble de tous les sommets qui sont à une même profondeur.

Un niveau à une hauteur h est **rempli** s'il contient 2^h sommets. Un arbre binaire de hauteur h est dit **quasi parfait à gauche** s'il vérifie les propriétés suivantes : tous les niveaux sauf éventuellement le dernier sont remplis et dans ce cas les feuilles du dernier niveau sont « tassées » à gauche.

Un **arbre de priorité** est un arbre binaire quasi parfait à gauche dont les sommets ont une valuation qui est un ordre partiel appelée

priorité et vérifiant la propriété suivante : aucun sommet n'a une valeur supérieure à celle de son père. La figure 3.4 donne un exemple d'arbre de priorité.

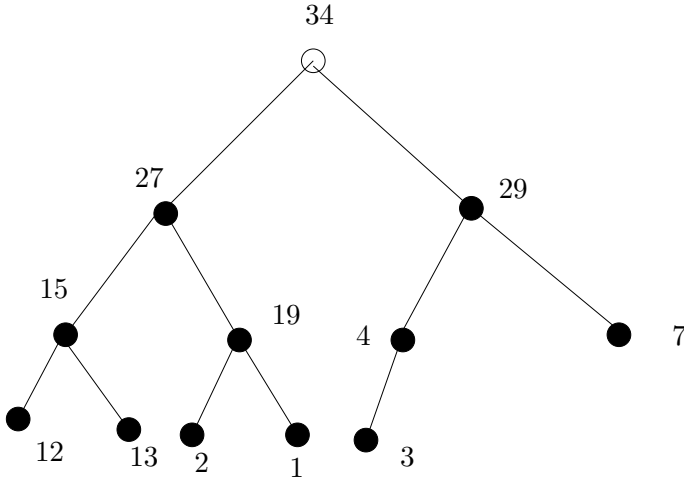


Figure 3.4 – Arbre de priorité. Une même valeur peut apparaître plusieurs fois dans un arbre de priorité.

Le codage d'un arbre quasi parfait à gauche se fait sur un tableau indexé à partir de 0. La taille du tableau « max » est un entier fixé à l'avance assez grand pour permettre les manipulations éventuelles à venir sur ce tableau.

```

structure arbrequasiparfaitgauche {
    entier : taille (nombre de sommets de l'arbre)
    tableau d'éléments : tab[max]
}

```

Les indices du tableau sont calculés de la manière suivante :

- la racine est à l'indice 0 ;
- si un sommet est à l'indice i alors :
 - * son fils gauche est à l'indice $2i + 1$,
 - * son fils droit est à l'indice $2i + 2$,
 - * son père est à l'indice $\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor$ (*la racine n'a pas de père*) ;
- si n est le nombre de sommets de l'arbre et si $i > \frac{n-1}{2}$ alors i est une feuille.

Un arbre de priorité dont les sommets sont indexés comme ci-dessus s'appelle un **tas**. La déclaration de la structure relative à un tas est identique à celle d'un arbre quasi parfait à gauche.

Exemple 3.1.3. Le tableau $T = [35, 13, 9, 1, 7, 6]$ correspond à l'arbre de la figure 3.5.

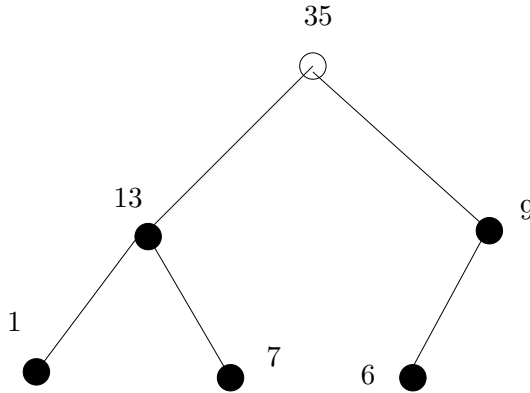


Figure 3.5 – Codage d'un tableau par un arbre.

Insertion-suppression

Naturellement on doit pouvoir ajouter ou supprimer des éléments d'un tas de telle sorte que la structure reste un tas. La procédure suivante ajoute la valeur « v » au tas « T » afin que l'ensemble conserve la structure de tas.

tas : ajouterElémentTas(tas : T , élément : v)

entier : i ;

Début

$T.taille = T.taille + 1$;

$i = T.taille - 1$;

Tant que $i \geq 1$ **et** $v > T.tab[\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor]$ **Faire**

$T.tab[i] = T.tab[\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor]$;

$i = \lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor$;

FinTant

$T.tab[i] = v$;

Retourner T ;

Fin

Suppression du maximum

Méthode

On enlève $T.tab[0]$

On enlève $x = T.tab[T.taille - 1]$ (*valeur de la feuille la plus à droite*)

$taille = taille - 1$

$i = 0$

Tant que $T.tab[i]$ a un ou deux fils dont la valeur est supérieure à x :

 suivant = indice des fils de i qui a la plus grande valeur

$T.tab[i] = T.tab[suivant]$

$i = suivant$

$T.tab[i] = x$

entier : supprimerMaxTas(tas : T)

élément : x ;

entier : max , $suivant$, i , n ;

booléen : $fini$;

Début

$max = T.tab[0]$;

$T.taille = T.taille - 1$;

$n = T.taille$;

$x = T.tab[n]$;

$suivant = 0$;

$i = 0$;

$fini = faux$;

Tant que $fini == faux$ **Faire**

Si $i > \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ **Alors**

$fini = vrai$;

Sinon

Si $i = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ ou $T.tab[2i + 1] > T.tab[2i + 2]$ **Alors**

$suivant = 2i + 1$;

Sinon

$suivant = 2i + 2$;

FinSi

FinSi

Si $T.tab[suivant] > x$ **Alors**

$T.tab[i] = T.tab[suivant]$;

$i = suivant$;

Sinon

$fini = vrai$;

```
    FinSi
  FinTant
  T.tab[i] = x;
  Retourner max;
Fin
```

Le tri par tas

On peut trier un tableau T grâce à la notion de tas.

tas : créerTas(tableau d'éléments : T) (*génère un tas à partir d'un tableau*)

```
entier : n = T.taille;
tableau : T1[n];
tas : A = nouveautas(n,T1); (crée un tas de taille n et de tableau
T1)
Début
  Pour tout i, i de 0 à n - 1, Faire
    A = ajouterElémentTas(A,T[i]);
  FinPour
  Retourner A;
Fin
```

On peut maintenant trier le tableau T en utilisant la procédure **supprimerMaxTas**.

tableau : trierTableau(tableau d'éléments : T)

```
tableau : tabtrier;
entier : tailletab, max;
tas : A = nouveautas(T);
Début
  tailletab = A.taille;
  Pour tout i, i de 0 à tailletab - 1, Faire
    max = supprimerMaxTas(A);
    tabtrier[i] = max;
  FinPour
  Retourner tabtrier;
Fin
```

3.1.5 Arbres AVL

Un arbre binaire de recherche est un **AVL** pour ADELSON-VELSKII et LANDIS s'il vérifie la propriété suivante, dite propriété d'équilibre : en tout sommet, les hauteurs du sous-arbre gauche et du sous-arbre droit diffèrent d'au plus 1.

On représente un arbre AVL comme un arbre binaire de recherche en rajoutant à la structure sommet un champ supplémentaire qui contient la hauteur du sous-arbre ayant pour racine ce sommet :

```
structure sommet {
    entier ou réel ou chaîne de caractères : valeur
    sommet : gauche
    sommet : droit
    entier : hauteur
}
```

```
structure AVL {
    sommet : racine
}
```

Un exemple d'arbre AVL est donné en figure 3.6.

Exercice 3.5. Donner un algorithme récursif qui teste si un arbre binaire de recherche est un AVL.

L'intérêt de cette structure réside dans le fait qu'elle évite les cas dégénérés (sous-arbres gauches et sous-arbres droits ayant une différence de profondeur importante). Mais l'ajout ou la suppression d'éléments dans un AVL peut déséquilibrer l'arbre. Ainsi il sera nécessaire de le rééquilibrer. À cet effet, on appliquera des **rotations** à des arbres non vides.

Exercice 3.6. Que ce passe-t-il si, dans la figure 3.8, le sommet C se retrouve sous l'arbre B_d ?

Les rotations

Soit A un arbre, A_g et A_d ses sous-arbres gauche et droit respectifs. Supposons qu'il y ait un déséquilibre entre A_g et A_d , c'est-à-dire que $|A.\text{racine.gauche.hauteur} - A.\text{racine.droit.hauteur}| = 2$. Donnons un algorithme permettant de rééquilibrer l'arbre.

équilibrerArbre(AVL : A)

Début

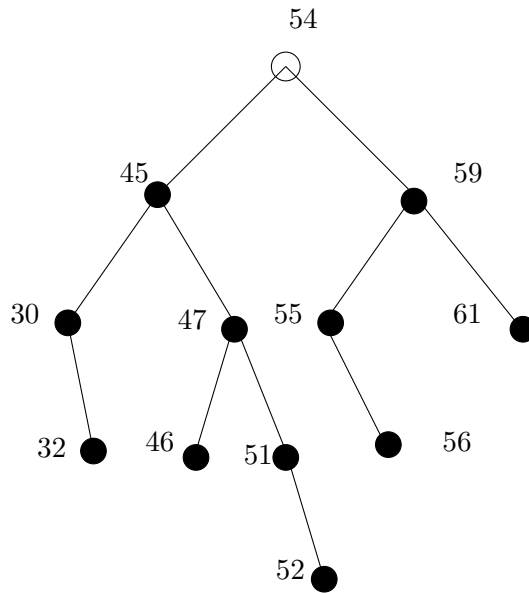


Figure 3.6 – Exemple d'AVL.

```
    équilibrerSousArbre(A.racine);  
Fin  
équilibrerSousArbre(sommet : v)  
Début  
    Si v.gauche.hauteur - v.droit.hauteur == 2 Alors  
        Si v.gauche.gauche.hauteur < v.gauche.droit.hauteur Alors  
            rotationGaucheSommet(v.gauche);  
            rotationDroiteSommet(v);  
        Sinon  
            rotationDroiteSommet(v);  
        FinSi  
    Sinon  
        Si v.gauche.hauteur - v.droit.hauteur == -2 Alors  
            Si v.droit.droit.hauteur < v.droit.gauche.hauteur Alors  
                rotationDroiteSommet(v.droit);  
                rotationGaucheSommet(v);  
            Sinon  
                rotationGaucheSommet(v);  
            FinSi  
    Fin
```

FinSi
FinSi
Fin

Donnons par exemple l'algorithme de rotation gauche correspondant à la figure 3.7.

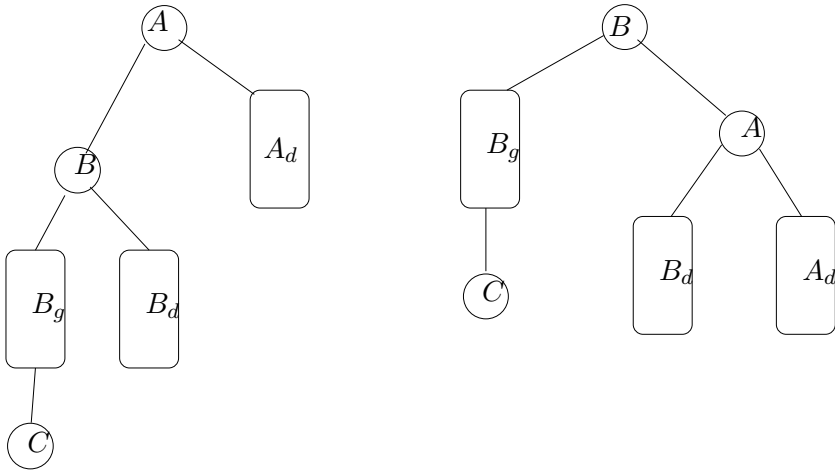


Figure 3.7 – Rotation droite. Dans l'arbre situé à gauche de la figure, les sous-arbres A_g , B_d et B_g sont de hauteur h . Donc l'arbre binaire sans le sommet C est un AVL. La présence de C crée un déséquilibre dans les hauteurs. On rééquilibre les hauteurs de l'arbre en effectuant une rotation droite.

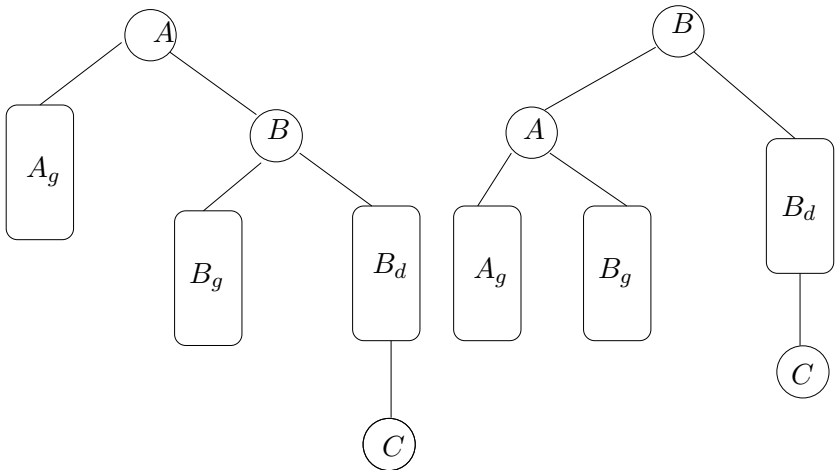


Figure 3.8 – Rotation gauche.

rotationGauche(AVL : A)

Début

rotationGaucheSommet(A.racine);

Fin

rotationGaucheSommet(sommet : v)

Début

 b = nouveausommet();

 b = v.droit;

 v.droit = b.gauche;

 b.gauche = v;

 v = b;

Fin

Insertions

Il s'agit d'insérer un sommet dans un AVL de telle sorte que l'ensemble reste un AVL :

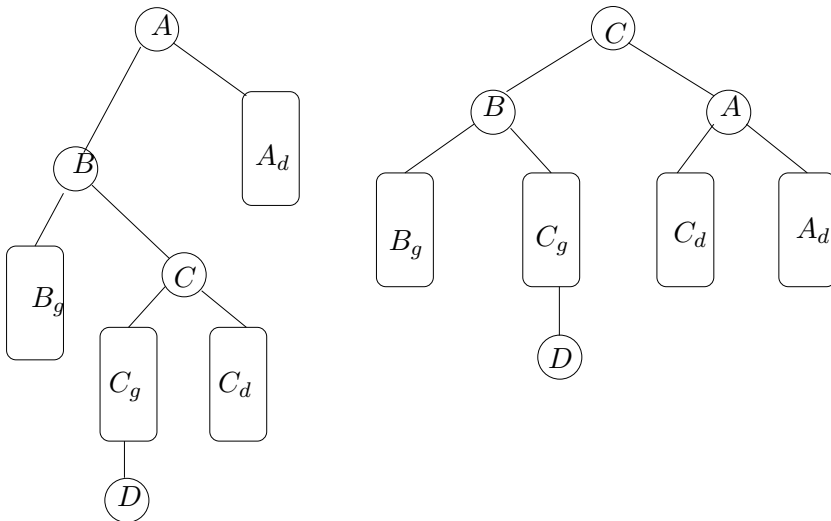


Figure 3.9 – Rotation gauche du sous-arbre gauche suivie d’une rotation droite. Dans la figure de gauche, les sous-arbres B_g et A_d sont de hauteur h et les sous-arbres C_g et C_d sont de hauteur $h - 1$. Par conséquent, l’arbre sans le sommet D est un AVL. En ajoutant D , on crée un déséquilibre dans les hauteurs. On rééquilibre l’arbre afin d’obtenir la figure de droite.

AVL : insérer(sommet : u, AVL : A)

Début

insérerSommet(u, A.racine);

Retourner équilibrerArbre(A);

Fin

insérerSommet(sommet : v, sommet : w)

Début

Si w == null **Alors**

w = nouveausommet();

w.valeur = v.valeur;

w.hauteur = 0;

w.gauche = v.gauche;

w.droit = v.droit;

Sinon

Si v.valeur < w.valeur **Alors**

insérerSommet(v, w.gauche);

Sinon

insérerSommet(v, w.droit);

FinSi

FinSi

Fin

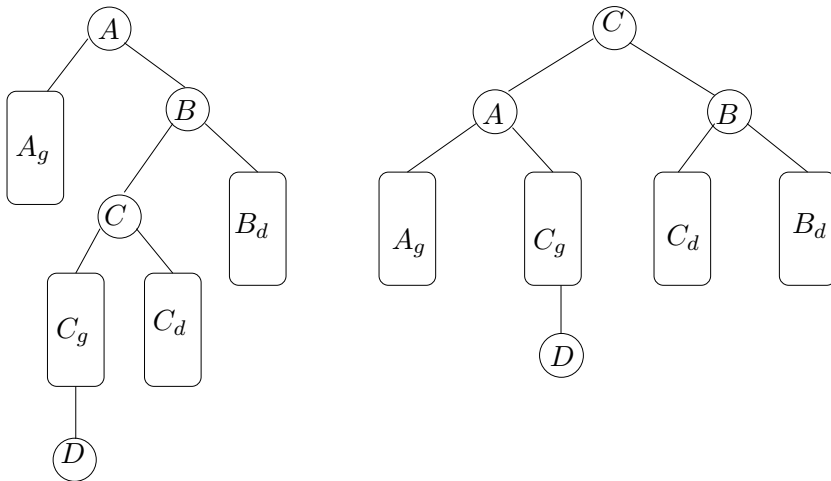


Figure 3.10 – Rotation droite du sous-arbre droit suivie d’une rotation gauche de l’ensemble.

Exercice 3.7. Donner un algorithme qui supprime sur un AVL un sommet ayant une valeur donnée.

3.1.6 Propriétés des arbres binaires

Dans la suite on supposera que tout arbre a au moins un sommet. Nous avons déjà vu qu'une arborescence binaire parfaite de hauteur h possède $2^{h+1}-1$ sommets. Ainsi pour tout arbre binaire on a $n \leq 2^{h+1}-1$.

Proposition 3.1.4. *Soit A un arbre binaire de hauteur h et ayant n sommets alors $\log_2(n+1) - 1 \leq h \leq n - 1$.*

Démonstration. Nous savons que pour un arbre le nombre d'arêtes m vaut $m = n - 1$. Par conséquent $h \leq n - 1$. De plus $n \leq 2^{h+1} - 1$, donc $\log_2(n+1) \leq h+1$ soit $\log_2(n+1) - 1 \leq h$. $\square$

Corollaire 3.1.5. *Soit A un arbre binaire de hauteur h et ayant n sommets. On a $h \leq n \leq 2^{h+1} - 1$.*

Proposition 3.1.6. *Soit A un arbre binaire ayant n sommets et f feuilles. On a $f \leq \frac{n+1}{2}$.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur le nombre n de sommets. C'est vrai pour $n = 1$.

Supposons la propriété vraie pour un arbre binaire ayant au plus $n - 1$ sommets.

Soit A un arbre binaire ayant n sommets. Alors par définition, A peut-être décomposé de la manière suivante $A = \langle r, A_g, A_d \rangle$, où r est la racine de A et A_g (respectivement A_d) est le sous-arbre gauche (respectivement le sous-arbre droit) de A . Donc le nombre de sommets de A_g est $n_1 < n$ et le nombre de sommets de A_d est $n_2 < n$. Par hypothèse de récurrence le nombre de feuilles de A_g est $f_1 \leq \frac{n_1+1}{2}$ et celui de A_d est $f_2 \leq \frac{n_2+1}{2}$. Mais $f = f_1 + f_2 \leq \frac{n_1+1}{2} + \frac{n_2+1}{2}$. Or $n = n_1 + n_2 + 1$, de là $f \leq \frac{n_1+n_2+1}{2} = \frac{n+1}{2}$. $\square$

Proposition 3.1.7. *Soit A un arbre binaire ayant n sommets, f feuilles et de hauteur h alors $\log_2(f) \leq h$.*

Exercice 3.8. Faire la preuve de cette proposition.

Théorème 3.1.8. *Soit A un AVL ayant n sommets et de hauteur h alors*

$$(*) \quad \log_2(n+1) \leq h+1 \leq \alpha \log_2(n+2),$$

où $\alpha = (\log_2(\phi))^{-1}$ et $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, le nombre d'or.

Démonstration. On a toujours $n \leq 2^{h+1} - 1$, donc $\log_2(n+1) \leq h+1$. Notons $f(h)$ le nombre de sommets minimum d'un AVL. Alors $f(h) = 1 + f(h-1) + f(h-2)$. En effet, l'AVL a un nombre minimum de sommets donc la différence entre l'arbre gauche et l'arbre droit est de 1 (voir figure 3.11). La suite définie par $F(h) = f(h) + 1$ est une suite de FIBONACCI : $F(0) = 2$, $F(1) = 3$, $F(2) = 5, \dots$ et $F(h) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{h+3} - \phi^{-(h+3)})$, $h \geq 0$. D'où $n+1 \geq F(h) > \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{h+3} - 1)$ et ainsi $h+3 < \log_\phi(\sqrt{5}(n+2)) < \frac{\log_2(n+2)}{\log_2(\phi)} + 2$. $\square$

Corollaire 3.1.9. *Pour un AVL, on a $h = O(\log_2(n))$.*

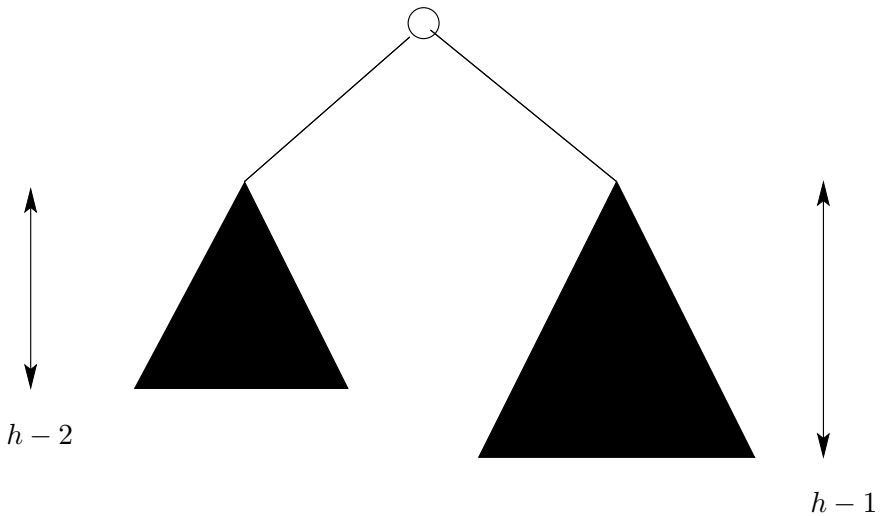


Figure 3.11 – Structure d'un AVL ayant un nombre minimum de sommets.

3.2 Complexité en temps des algorithmes sur les arbres binaires

La plupart des opérations classiques sur les arbres binaires de recherche tournent autour de la recherche, de l'insertion ou de la suppression d'un élément. Les algorithmes décrits dans les sections précédentes descendent dans l'arbre en suivant les pères et les fils droits ou

gauches jusqu'au résultat escompté (recherche, insertion, suppression... d'éléments). Par conséquent, les sommets rencontrés lors des différents appels récurifs forment une chaîne descendante issue de la racine de l'arbre. Le temps d'exécution est donc en $O(h)$.

Deux cas peuvent se présenter :

- chaque sommet ne possède qu'un seul fils gauche ou droit ; l'arbre est alors réduit à une chaîne et la complexité des opérations classiques sera en $O(n)$;
- l'arbre est parfait. Ainsi on a $n = 2^{h+1} - 1$ et $h + 1 = \log_2(n + 1)$: la hauteur h est d'ordre $O(\log_2(n))$. D'où les opérations classiques qui ont une complexité en $O(\log_2(n))$.

On peut montrer (la démonstration n'est pas facile) que la hauteur moyenne d'un arbre binaire de recherche est en $O(\log_2(n))$.

Pour les AVL l'insertion et la suppression sont également en $O(\log_2(n))$. Les rotations simples ou doubles se font en temps constant $O(1)$. De plus nous avons le résultat suivant (sans preuve).

Théorème 3.2.1.

Insertion : pour rééquilibrer un arbre AVL après une insertion, une seule rotation ou double rotation suffit.

Suppression : pour rééquilibrer un arbre AVL après une suppression, il faut jusqu'à $O(\log_2(n))$ rotations ou double rotations.

La structure de base d'un tas est un arbre quasi parfait à gauche.

Proposition 3.2.2. Soit T un tas avec une hauteur $h \geq 1$ et un nombre de sommets n . Alors $h = \lfloor \log_2(n) \rfloor$. Par conséquent la hauteur h d'un tas est en $O(\log_2(n))$.

Démonstration. Comme la structure de base d'un tas est un arbre quasi-parfait à gauche, tous les niveaux jusqu'au niveau $h-1$ sont remplis. Ainsi nous avons l'encadrement suivant :

$$2^h + 1 \leq n \leq 2^{h+1} - 1, \text{ donc } 2^h \leq n \leq 2^{h+1} - 1,$$

soit $h \leq \log_2(n) < h + 1$. D'où $h = \lfloor \log_2(n) \rfloor$. □

D'après la proposition 3.2.2, les opérations classiques sur les tas se font en $O(\log_2(n))$. Remarquons que la recherche du plus grand élément est en temps constant $O(1)$.

Exercice 3.9. Montrer que la complexité du tri par tas est en $O(n \log_2(n))$.

3.3 Graphes : le retour

Au chapitre 1 nous avons vu comment coder un (di)graphe. Dans cette section nous allons préciser leurs représentations informatiques. Dans la suite on supposera que les graphes sont simples. Néanmoins on pourra facilement adapter les résultats de ce paragraphe aux multigraphes.

3.3.1 Représentation par matrice d'adjacence

Un (di)graphe $\Gamma = (V; E)$ ayant n sommets peut être représenté par une matrice $M(\Gamma)$ carrée de taille $n \times n$ telle que :

$$M[x; y] = \begin{cases} 1 & \text{si } \{x, y\} \in E, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lorsque le (di)graphe est non orienté la matrice est symétrique. Donnons maintenant une représentation informatique de ce codage.

```
structure graphemat {
  entier : n (nombre de sommets du (di)graphe)
  tableau d'entiers : tab[maxelements][maxelements]
}
```

Exercice 3.10. Adapter cette représentation à des (di)graphes dont les arêtes sont valuées, à des multigraphes, à des multigraphes dont les arêtes sont valuées.

3.3.2 Représentation par tableau des listes de successeurs

On peut également représenter un (di)graphe $\Gamma = (V; E)$ ayant n sommets par un tableau de n listes chaînées ; la i -ième liste est la liste des successeurs (c'est-à-dire des voisins) du sommet i .

```
structure sommet {
  entier ou réel ou chaîne de caractères : valeur
  sommet : suivant
}

structure liste {
  sommet : premier
  sommet : dernier
}
```

```
structure grapheliste {  
    entier : n (nombre de sommets du (di)graphe)  
    tableau de listes : Tab[maxelements]  
}
```

Par la suite les (di)graphes seront appelés indifféremment graphe, excepté si cela prête à confusion.

3.3.3 Remarques sur la complexité de ces représentations

Pour un algorithme qui nécessite la lecture complète d'un (di)graphe à n sommets et m arêtes (arcs), le coût sera d'au moins $O(n^2)$ dans le cas d'une matrice d'adjacence sachant que la lecture ou l'écriture d'un coefficient de la matrice se fait en temps constant $O(1)$.

Dans le cas de la représentation par tableau des listes de successeurs le coût sera d'au moins la lecture de la structure grapheliste donc $O(n+m)$ (lecture ou écriture d'un sommet en temps constant).

Déterminer si une arête (ou un arc) existe a un coût de :

- $O(1)$ avec la matrice d'adjacence ;
- $O(n)$ avec les listes de successeurs.

On peut également représenter un (di)graphe par listes de successeurs et listes de prédécesseurs. Quand le (di)graphe est peu dense, c'est-à-dire quand le nombre d'arêtes (ou d'arcs) est petit devant le carré du nombre de sommets (c'est-à-dire $m \ll n^2$ et donc $m = O(n^2)$), on choisira la représentation par tableau des listes de successeurs.

3.3.4 Parcours d'un (di)graphe

Parcours en largeur

Principe : à partir d'un sommet s , on visite les sommets situés à une distance égale à 1 de s , ce sont les successeurs de s ; puis on visite les sommets à distance 2 de s , ce sont les successeurs des successeurs de s qui n'ont pas encore été visités ; et ainsi de suite.

On va utiliser comme structure de donnée une file (premier élément arrivé, premier élément sorti). On aura également besoin d'un tableau booléen `marque[ ]`, déclaré en variable générale, qui marque les sommets visités afin de ne pas les visiter deux fois. La structure **fileListe** est définie à la fin de ce chapitre.

```

parcourslargeur(graphe :  $\Gamma$ , sommet :  $s$ )
  sommet : courant ;
  fileListe : F ;
  Début
    marque[s] = 1 ;
    enfiler s dans F ;
  Répéter
    courant = défiler(F) ;
    Pour tout successeur x de courant Faire
      Si marque[x] == 0 Alors
        enfiler x dans F ;
        marque[x] = 1 ;
      FinSi
    FinPour
  Jusqu'à F = file vide
Fin

```

Remarque 3.3.1. Par cet algorithme on ne visite que les sommets qui sont accessibles à partir de s : cela est insuffisant lorsque le (di)graphe n'est pas connexe. Pour visiter entièrement le graphe on a :

```

parcourslargeurtotal(graphe :  $\Gamma$ )
  Début
    Pour tout sommet x de  $\Gamma$  Faire
      marque[x] = 0 ;
    FinPour
    Pour tout sommet x de  $\Gamma$  Faire
      Si marque[x] == 0 Alors
        parcourslargeur( $\Gamma$ , x) ;
      FinSi
    FinPour
  Fin

```

Complexité du parcours en largeur

La complexité du premier algorithme provient de la boucle **Pour tout** successeur x de courant **Faire**.

- Si le (di)graphe est représenté par une matrice d'adjacence alors :
- ou bien tous les sommets sont accessibles de s ; il faudra lire la matrice intégralement ce qui se fait en $O(n^2)$. Par conséquent, on n'a qu'un seul appel dans la boucle « **Pour tout** sommet x de Γ

- Faire** » du deuxième algorithme. On en conclut que la complexité de la procédure « **parcourslargeur**(**graphe** : Γ) » est en $O(n^2)$;
- ou bien tous les sommets ne sont pas accessibles de s et par suite la complexité de la boucle « **Pour tout** successeur x de courant **Faire** » est en $O(kn^2)$, où k est le nombre de sommets accessibles en partant de s divisé par le nombre de sommets total. Dans la boucle « **Pour Tout** sommet x de Γ **Faire** » du deuxième algorithme on aura plusieurs appels (autant que de composantes connexes du graphes ou de composantes fortement connexes pour les digraphes). Au bout du compte, dans cette boucle en appelant plusieurs fois le premier algorithme on aura lu toute la matrice. Donc la complexité de la procédure « **parcourslargeur**(**graphe** : Γ) » est en $O(n^2)$.

Si le (di)graphe est représenté par tableau des listes de successeurs alors on raisonne de la même manière que ci-dessus et la complexité de cette boucle sera en $O(n + m)$ (les arêtes sont parcourues une fois).

Parcours en profondeur

Principe : aller le plus loin possible le long d'une chaîne (respectivement d'un chemin) en partant d'un sommet s . Pour cela on part du sommet s et l'algorithme est appelé récursivement pour chaque sommet voisin de s . Comme pour le parcours en largeur, on utilise un tableau `marque[ ]` déclaré en variable générale et qui marque les sommets du graphe afin de ne pas les traiter deux fois.

parcoursprofondeur(**graphe** : Γ , **sommet** : s)

Début

`marque[s] = 1 ;`

Pour tout successeur x de s **Faire**

Si `marque[x] == 0` **Alors**

parcoursprofondeur(Γ, x) ;

FinSi

FinPour

Fin

Pour visiter tous les sommets on a besoin de :

parcoursprofondeurtotal(**graphe** : Γ)

Début

Pour tout sommet x de Γ **Faire**

`marque[x] = 0 ;`

FinPour

```
Pour tout sommet  $x$  de  $\Gamma$  Faire  
  Si  $\text{marque}[x] == 0$  Alors  
     $\text{parcoursprofondeur}(\Gamma, x)$  ;  
  FinSi  
FinPour  
Fin
```

Remarque 3.3.2. Puisque les variables sont passées par référence dans les algorithmes, on peut mettre le tableau `marque[ ]` en paramètre dans les algorithmes.

Exercice 3.11. Étudier la complexité des deux procédures ci-dessus.

3.4 Compléments

3.4.1 Types de données simples

En informatique la plupart des langages sont **typés**, c'est-à-dire qu'à toute variable on associe deux choses :

- un nom ;
- un type de donnée.

Le nom sert à la reconnaissance de la variable, le type de donnée détermine la nature de celle-ci. Définir le type d'une variable permet d'allouer en mémoire une place de stockage d'un ou plusieurs octets pour cette variable. Rappelons qu'un **bit** est l'unité binaire de quantité d'information, prenant généralement les valeurs 0 ou 1. Un bloc de 8 bits consécutifs forme ce que l'on appelle un **byte** ou un **octet**. Ainsi quand on déclare une variable il est nécessaire de préciser au compilateur quelle sorte de données celle-ci va pouvoir contenir (la façon de déclarer la variable dépendra du langage).

Types de base

Il y a plusieurs types de base : **entier**, **réel**, **chaîne**, **caractère**, **booléen**. La déclaration se fait de la manière suivante :

entier : x ;

$x = 10$;

ou de manière plus concise **entier** : $x = 10$;

chaîne : $s = \text{"chaîne de caractères"}$;

Un autre type de base un peu plus élaboré est la notion de tableau. Un tableau est un ensemble d'éléments de même type qui sont repérés

par des indices. Un tableau a une taille maximum ; il peut avoir un, deux ou plusieurs dimensions qui ont donc chacune une taille maximum.

tableau : $T[7]$; (tableau à une dimension ayant 7 positions, à savoir $T[0], T[1], \dots, T[6]$; la valeur 7 est la taille maximum du tableau).

Les indices d'un tableau commencent en 0. Pour accéder à un élément du tableau, on donne le nom du tableau et la position de l'élément. Par exemple $T[3]$ donnera le 4^e élément du tableau T .

On peut par exemple stocker une matrice 3×2 dans un tableau du type : $Mat[3][2]$. Pour afficher les éléments de cette matrice, il faudra faire deux boucles « **Pour ... FinPour** » imbriquées. Les six éléments de cette matrice sont $Mat[0][0]$, $Mat[0][1]$, $Mat[1][0]$, $Mat[1][1]$, $Mat[2][0]$, $Mat[2][1]$.

3.4.2 Fonctions

Une fonction ou procédure est un ensemble d'instructions regroupées afin d'effectuer une ou plusieurs opérations. Une fonction prend zéro, un ou plusieurs paramètres et elle retourne un certain nombre de valeurs (éventuellement aucune). On déclare une fonction de la manière suivante :

types des valeurs retournées : **nomDeLaFonction**(**type parametre1** : parametre1, **type parametre2** : parametre2, ...)

Début

Bloc d'instructions ;

Fin

La fonction peut renvoyer des valeurs grâce à l'instruction **Retourner**. Pour exécuter une fonction on fait appel à elle à l'intérieur d'un programme en écrivant son nom et en donnant des arguments, s'il y a lieu : **nomDeLaFonction**($x, y, z, \dots$) ;

Donnons quelques exemples :

entier : **somme**(**entier** : x , **entier** : y)

Début

entier : s ;

$s = x + y$;

Retourner s ;

Fin

Cette fonction prend deux entiers en argument, calcule leur somme et retourne celle-ci qui est un entier. On l'appelle de la manière suivante : **somme**(7, 6).

3.4.3 Passage des paramètres dans une fonction

Il existe deux manières de passer des paramètres à une fonction : faisons-en une description sommaire :

– le passage par valeur : une variable x est déclarée et initialisée dans une fonction f_1 . Elle est ensuite passée en paramètre à une autre fonction f_2 lors d'un appel de f_2 :

$$f_2(x);$$

cette variable est alors copiée sur une pile (appelée pile d'appels). C'est cette copie qui va être utilisée par f_2 . Ainsi f_2 n'utilise pas la variable initialisée dans f_1 . Par suite, en sortie de f_2 , si on ne retourne pas sa valeur et si on ne l'affecte pas à une autre variable, les modifications faites par f_2 sur x ne seront pas stockées et seront perdues ;

– le passage par référence : la variable est passée à f_2 grâce à son adresse mémoire. La fonction f_2 va effectuer les modifications sur l'objet de base et non sur une copie comme dans le passage par valeur.

Exemple 3.4.1. Considérons la fonction suivante :

échange(entier : x, entier : y)

Début

entier : z ;
 z = x ;
 x = y ;
 y = z ;
afficher x,y ;

Fin

et les lignes de commandes suivantes :

x = 3 ;
 y = 10 ;
échange(x, y) ; (*donne le résultat : 10, 3*)
afficher x ; (*on aura 3*)
afficher y ; (*on aura 10*)

Ici, on a passé en paramètre de **échange** une copie de x et une copie de y, donc dans cette procédure les valeurs de x et de y n'ont pas été modifiées.

Par contre, lorsque les paramètres sont par référence, ceux-ci sont susceptibles d'être modifiés au cours d'une procédure. C'est le cas des différents algorithmes décrits dans ce chapitre.

3.4.4 Structures linéaires

Les piles (*stack* en anglais)

Une pile est une structure de données où l'ajout et le retrait d'un élément se fait toujours en tête de la liste (au sommet de la pile). Son fonctionnement est du type LIFO (*last in, first out*). On peut implémenter une pile sous forme d'un tableau ou sous forme d'une liste chaînée. Sous forme d'un tableau nous avons :

```
structure pileTableau {  
    tableau d'éléments : tab[maxelements]  
    entier : taille  
}
```

Par convention une pile sera vide quand $\text{taille} = 0$.

Les opérations utilisées pour manipuler des piles sont :

- empiler : ajoute un élément sur la pile ; le terme anglais correspondant est *push* ;
- dépiler : enlève un élément de la pile et le renvoie ; le terme anglais correspondant est *pop* ;
- la pile est-elle vide ? : renvoie vrai si la pile est vide et faux sinon ;
- nombre d'éléments de la pile : renvoie le nombre d'éléments dans la pile.

pileTableau : empiler(pileTableau : P, élément : x)

Début

Si P.taille < maxelements **Alors**

 P.tab[P.taille] = x ;

 P.taille = P.taille + 1 ;

Retourner P ;

Sinon

Afficher "Pile pleine" ;

Retourner P ;

FinSi

Fin

Pour dépiler on a besoin de 2 fonctions : la première renvoie le dernier élément empilé, la deuxième modifie la pile.

élément : dépilerSommet(pileTableau : P)

Début

Si nonvide(P) == vrai **Alors**

```
    Retourner P.tab[taille - 1];  
Sinon  
    Afficher "Pile vide";  
    Retourner k; (k est un élément choisi au préalable pour indi-  
quer que la pile est vide)  
FinSi  
Fin
```

pileTableau : dépiler(pileTableau : P)

```
Début  
    Si nonvide(P) == vrai Alors  
        P.taille = P.taille - 1;  
        Retourner P;  
    Sinon  
        Afficher "Pile vide";  
        Retourner P;  
    FinSi  
Fin
```

booléen : nonVide(pileTableau : P)

```
Début  
    Si P.taille  $\geq$  1 Alors  
        Retourner vrai;  
    Sinon  
        Retourner faux;  
    FinSi  
Fin
```

L'implémentation par liste chaînée se fait par le biais d'une allocation dynamique de l'espace mémoire :

```
structure cellulePile {  
    entier ou réel ou chaîne de caractères : valeur  
    cellulePile : suivant  
}  
  
structure pileListe {  
    cellulePile : premier  
}
```

On a également les fonctions élémentaires :

booléen : nonVide(pileListe : P)

Début

Si P.premier == null **Alors**

Retourner faux ;

Sinon

Retourner vrai ;

FinSi

Fin

pileListe : empiler(pileListe : P, élément : x)

cellulePile : C ;

Début

 C.valeur = x ;

 C.suivant = P.premier ;

 P.premier = C ;

Retourner P ;

Fin

pileListe : dépiler(pileListe : P)

cellulePile : C ;

Début

Si nonVide(P) == vrai **Alors**

 C = P.premier ;

 P.premier = C.suivant ;

Détruire C ;

Retourner P ;

Sinon

Afficher "Pile vide" ;

Retourner P ;

FinSi

Fin

Les files (ou queues)

Les files sont utilisées pour traiter des objets qui sont en attente. Elle fonctionnent donc comme une liste d'attente selon le mode FIFO (*first in, first out*) ; Par exemple des usagers d'une administration qui font la queue pour être servis. Chaque usager qui se présente à un comptoir reçoit un numéro ; les personnes sont ensuite appelées à un guichet en

fonction de leur numéro d'arrivée. On doit donc gérer deux choses : les premiers arrivés et les derniers arrivés.

```
structure celluleFile {  
    entier ou réel ou chaîne de caractères : valeur  
    celluleFile : suivant  
}
```

```
structure fileListe {  
    celluleFile : premier  
    celluleFile : dernier  
}
```

```
booléen : nonVide(fileListe : L)  
    Début  
        Si L.premier == null Alors  
            Retourner faux ;  
        Sinon  
            Retourner vrai ;  
        FinSi  
    Fin
```

Noter que dans l'algorithme **défiler** ci-dessous, la cellule L.dernier garde en mémoire tous les éléments listés dans l'ordre inverse, même après défilage.

```
fileListe : enfiler(fileListe : L, élément : x)  
    celluleFile : C ;  
    Début  
        C.valeur = x ;  
        C.suivant = null ;  
        Si nonVide(L) == faux Alors  
            L.premier = C ;  
            L.dernier = C ;  
        Sinon  
            L.dernier.suivant = C ;  
            C.suivant = null ;  
            L.dernier = C ;  
            Retourner L ;  
        FinSi  
    Fin
```



```
fileListe : défiler(fileListe : L)
  celluleFile : C;
  Début
    Si nonVide(L) == faux Alors
      Afficher "erreur";
      Retourner L;
    Sinon
      Si L.premier.suivant == null Alors
        Détruire L.premier;
        L.premier = null;
        Retourner L;
      Sinon
        C = L.premier;
        L.premier = C.suivant;
        Détruire C;
        Retourner L;
      FinSi
    FinSi
  Fin
```



Chapitre 4

Connexité et flots dans les réseaux

Une question importante est de savoir « à quel point » un graphe est connexe, c'est-à-dire combien de sommets ou d'arêtes on doit enlever pour déconnecter celui-ci. Cette notion de connexité est particulièrement pertinente pour analyser la « vulnérabilité » des réseaux. Nous avons défini au chapitre 1 la notion de réseau comme étant un (di)graphe valué ; exemple : un automobiliste doit se rendre de son domicile à son travail. Pour ce faire, il va emprunter le réseau routier ; une entreprise doit envoyer ses produits manufacturés sur le marché d'un pays donné, il utilisera divers réseaux : routier, maritime, aérien. . .

Les réseaux sont des outils indispensables à notre société globalisée. Leur intérêt pratique dans différents domaines tels que les transports, les communications, la distribution est fondamental. Par conséquent une analyse mathématique de ces (di)graphes s'est développée, donnant naissance à la théorie des flots. Nous nous proposons ici d'introduire les propriétés élémentaires des réseaux. Dans tout le chapitre, les (di)graphes sont supposés **simples, d'ordre fini**.

4.1 Sommet-connexité et arête-connexité

Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe simple d'ordre fini ayant au moins un sommet et k un entier naturel ; Γ est dit **k -sommet-connexe** (ou simplement **k -connexe**) si :

- i) $|V| > k$ et

- ii) pour toute partie $X \subset V$ telle que $|X| < k$, le sous-graphe induit $\Gamma(V \setminus X)$ est connexe.

On peut remarquer qu'un graphe k -connexe est h -connexe pour tout entier $h \leq k$. De plus, un graphe ayant au moins un sommet est automatiquement 0-connexe.

Lorsque le graphe $\Gamma = (V; E)$ possède au moins un sommet, on peut également définir sa **sommet-connexité** que l'on note $\kappa(\Gamma)$: c'est le plus grand entier $k \geq 0$ tel que Γ soit k -sommet-connexe ; $\kappa(\Gamma)$ est donc le nombre minimum de sommets qu'il faut ôter pour déconnecter le graphe, c'est-à-dire le rendre non connexe :

$$\kappa(\Gamma) = \min\{h \geq 0 : \exists X \subset V \text{ tel que } |X| = h \text{ et } \Gamma(V \setminus X) \text{ non connexe}\}.$$

Si $|V| = 1$, on a $\kappa(\Gamma) = 0$ et Γ est connexe ; lorsque $|V| \geq 2$, $\kappa(\Gamma) = 0$ équivaut à dire que Γ n'est pas connexe. Dans le cas du graphe complet à $n \geq 2$ sommets K_n , on obtient facilement $\kappa(K_n) = n - 1$.

Nous verrons à la fin de ce chapitre (voir § 4.5) une caractérisation de la k -connexité, qui s'exprime en termes de chaînes disjointes (théorème de WHITNEY).

De façon « duale », pour un entier $k \geq 0$, on dit que Γ est **k -arête-connexe** si

- i) $|E| > k$ et
 ii) pour toute partie $F \subset E$ telle que $|F| < k$, le sous-graphe partiel $(V, E \setminus F)$ obtenu en lui ôtant les arêtes de F est connexe.

Pour un graphe satisfaisant à cette définition, son nombre de sommets est au moins égal 2. On voit donc que si $E = \emptyset$ ou $E = \{a\}$ alors Γ n'est jamais k -arête-connexe et ceci pour tout $k \geq 0$. De façon plus précise, dans un graphe k -arête-connexe, chaque sommet est adjacent à au moins k autres sommets. Cela signifie que le degré de chaque sommet est au moins égal à k , donc que le nombre d'arêtes satisfait $|E| \geq k|V|/2$.

Lorsque $|E| \geq 2$, on peut définir l'**arête-connexité** de Γ , que l'on note $\lambda(\Gamma)$: c'est le plus grand entier k tel que Γ soit k -arête-connexe. C'est donc le nombre minimum d'arêtes qu'il faut supprimer pour déconnecter le graphe :

$$\lambda(\Gamma) = \min\{h \geq 0 : \exists F \subset E \text{ tel que } |F| = h \text{ et } (V; E \setminus F) \text{ non connexe}\}.$$

Lorsque $|E| \geq 2$, $\lambda(\Gamma) = 0$ équivaut à dire que Γ n'est pas connexe.

La figure 4.1 illustre ces notions de connexité.

Les résultats suivants montrent les relations entre la sommet-connexité et l'arête-connexité.

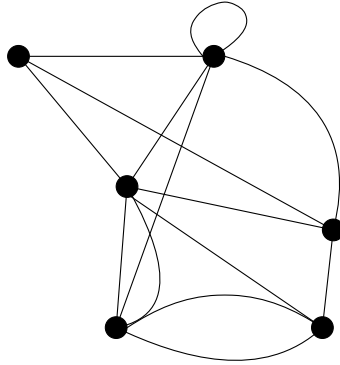


Figure 4.1 – Un graphe 3-sommet-connexe et 3-arête-connexe. On remarque aussi que pour ce graphe : $\kappa(\Gamma) = \lambda(\Gamma) = 3$.

Lemme 4.1.1. *Soient k et t deux entiers naturels vérifiant $1 \leq t \leq k-1$ et $\Gamma = (V; E)$ un graphe k -sommet-connexe. Le graphe partiel Γ' obtenu en supprimant t arêtes est $(k-t)$ -sommet-connexe.*

Démonstration. On procède par récurrence sur le nombre t .

Supposons $t = 1$ (donc $k \geq 2$). Soit $a = \{x, y\} \in E$ et $\Gamma' = \Gamma \setminus a$; on doit montrer que Γ' est $(k-1)$ -sommet-connexe.

Soit $X \subset V(\Gamma') = V$ avec $|X| = k-2$: il s'agit de s'assurer que $\Gamma'(V \setminus X)$ est connexe; choisissons d'abord $z \in V \setminus X \cup \{x, y\}$ (c'est possible puisque $|V| > k \geq |X \cup \{x, y\}|$) et soient $u, v \in V \setminus X$:

- si $u \neq x$, on a $z, u \in V \setminus X \cup \{x\}$ et comme Γ est k -sommet-connexe, on ne peut le déconnecter en ôtant $|X \cup \{x\}| = k-1$ sommets. Il existe donc une chaîne C dans Γ entre z et u ne passant par aucun sommet de $X \cup \{x\}$. Cette chaîne n'emprunte en particulier pas l'arête a . Elle est donc une chaîne de $\Gamma'(V \setminus X)$;
- si $u = x$, on a $z, u \in V \setminus X \cup \{y\}$ et pour la même raison, il y a une chaîne C entre z et u évitant $X \cup \{y\}$ donc également a .

Dans les deux cas on a la même propriété : il y a une chaîne C dans $\Gamma'(V \setminus X)$ entre z et u .

De même en distinguant les cas $v \neq y$ et $v = y$, on parvient à établir l'existence d'une chaîne C' dans $\Gamma'(V \setminus X)$ entre z et v . Il s'ensuit que $C \cup C'$ est une chaîne de $\Gamma'(V \setminus X)$ entre u et v . Cela établit la connexité de $\Gamma'(V \setminus X)$ et le lemme lorsque $t = 1$.

Supposons maintenant que la propriété soit vraie jusqu'à $t-1$ et soit Γ' le graphe Γ privé de t arêtes : pour l'une quelconque de ces t arêtes a ,

on peut écrire $\Gamma' = \Gamma'' \setminus a$ où Γ'' est le graphe Γ privé de $t - 1$ arêtes. Par hypothèse de récurrence Γ'' est k' -sommet-connexe où $k' = k - (t - 1)$. En appliquant le cas $t = 1$ à Γ'' et à $\Gamma' = \Gamma'' \setminus a$, on obtient que Γ' est $(k' - 1)$ -sommet-connexe, c'est-à-dire $(k - t)$ -sommet-connexe. $\square$

On établit maintenant une relation entre l'arête-connexité $\lambda(\Gamma)$ et le degré minimum $\delta(\Gamma)$ du graphe Γ .

Lemme 4.1.2. *Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe connexe ayant au moins une arête, alors $\lambda(\Gamma) \leq \delta(\Gamma)$.*

Démonstration. Par hypothèse, le degré minimum δ n'est pas nul : soit x un sommet de degré égal à $\delta(\Gamma)$. En éliminant les $\delta(\Gamma)$ arêtes incidentes à x on obtient au moins deux composantes connexes : celle réduite au sommet x et celles liées aux autres sommets du graphe Γ . $\square$

Comme l'illustre la figure 4.2, il se peut que $\lambda(\Gamma) < \delta(\Gamma)$.

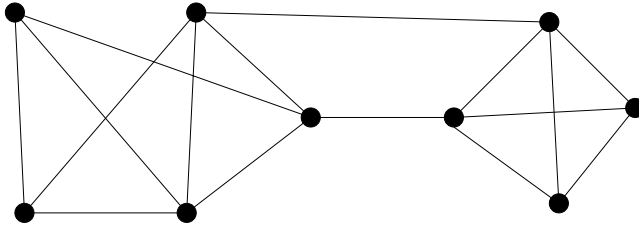


Figure 4.2 – Un graphe ayant un degré minimum égal à $\delta(\Gamma) = 3$, alors que $\lambda(\Gamma) = 2$.

Proposition 4.1.3. *Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe ayant au moins une arête, alors*

$$\kappa(\Gamma) \leq \lambda(\Gamma) \leq \delta(\Gamma).$$

Démonstration. Si $\kappa(\Gamma) = 0$, le lemme 4.1.2 donne le résultat. Sinon, on se donne un ensemble Y de $\kappa(\Gamma) - 1$ arêtes de Γ . Le graphe Γ est $\kappa(\Gamma)$ -sommet-connexe. D'après le lemme 4.1.1, le graphe partiel obtenu en supprimant les arêtes de Y est 1-sommet-connexe. Par conséquent, la suppression des arêtes de l'ensemble Y ne déconnecte pas le graphe, ainsi $\lambda(\Gamma) > \kappa(\Gamma) - 1$. $\square$

Exercice 4.1. Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe k -sommet-connexe. Justifier que le nombre d'arêtes de Γ est au moins égal à $\lceil \frac{k|V|}{2} \rceil$. Réciproquement,

caractériser les graphes simples $(V; E)$ tels que $|E| = k|V|/2$.

Indication : utiliser l'exercice 1.1.9.

Les graphes 2-sommet-connexes et par suite les graphes k -sommet-connexes pour $k \geq 2$, sont sans sommet d'articulation : soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe connexe ; un sommet $x \in V$ est un **sommet d'articulation** de Γ si le graphe induit $\Gamma(V \setminus \{x\})$, noté simplement $\Gamma - x$, n'est pas connexe. Cette définition est à rapprocher de celle d'isthme, qui est une arête du graphe qui, lorsqu'elle est retirée, produit un graphe non connexe.

On voit que les sommets d'articulation et les isthmes sont des signes de fragilité pour un graphe connexe ; les graphes 2-sommet-connexes et les graphes 2-arête-connexes sont très importants dans la conception des réseaux de télécommunication car leur structure garantit la continuité des communications même si un relai ou une ligne venait à être déficient. Le paragraphe suivant étudie ce type de graphe.

4.2 Graphes 2-sommet-connexes

Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe et $W \subset V$. Le sous-graphe induit $B = \Gamma(W)$ est appelé **bloc** de Γ s'il est connexe, sans sommet d'articulation et s'il est maximal pour l'inclusion dans l'ensemble des sous-graphes induits connexes et sans sommet d'articulation. Cela signifie que

- i) B est connexe ;
- ii) B est sans sommet d'articulation ;
- iii) si $W' \supset W$ et $B' = \Gamma(W')$ est connexe sans sommet d'articulation, alors $B' = B$.

De façon un peu plus précise, soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties X de V telles que $\Gamma(X)$ soit connexe et sans sommet d'articulation : les blocs B correspondent aux éléments maximaux de $\mathcal{A}$: $M \in \mathcal{A}$ est maximal (pour l'inclusion, voir l'annexe du chapitre 1) si et seulement si $B = \Gamma(M)$ est un bloc.

Remarque 4.2.1. On a même un résultat plus précis (voir l'annexe du chapitre 1) : si $X \in \mathcal{A}$, il existe $M \in \mathcal{A}$ maximal tel que $X \subset M$. Ainsi tout graphe induit connexe sans sommet d'articulation est contenu dans un bloc. C'est notamment le cas lorsque le graphe induit est un cycle élémentaire.

Observons plus en détail ce que sont les blocs dans un graphe : soit $B = \Gamma(W)$ un bloc.

- si $|W| = 1$, B est un sommet isolé ;
- si $|W| = 2$, B est un isthme ;
- si $|W| \geq 3$, B est 2-connexe maximal, c'est-à-dire

$$W' \supset W \text{ et } \Gamma(W') \text{ 2-connexe} \implies W' = W.$$

En effet, on peut établir (exercice) que lorsque $|W| \geq 3$, alors $\Gamma(W)$ est connexe sans sommet d'articulation si et seulement si $\Gamma(W)$ est 2-connexe.

Remarque 4.2.2. Un bloc ayant au moins 3 sommets ne peut être un arbre : les arbres sont « maigres » du point de vue de la connexité car presque tous les sommets sont des sommets d'articulation, les seuls qui ne le soient pas sont les feuilles (sommets pendants).

Lemme 4.2.3. Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe d'ordre fini. On note $\mathcal{B}$ l'ensemble (fini) de ses blocs.

- i) Si $B_1 = (V_1; E_1), B_2 = (V_2; E_2)$ sont deux blocs distincts (c'est-à-dire $V_1 \neq V_2$) alors $|V_1 \cap V_2| \leq 1$.
- ii) Si Γ est connexe, ses sommets d'articulation sont exactement les intersections de blocs distincts.
- iii) E est la réunion disjointe de ses blocs : $E = \sqcup_{B \in \mathcal{B}} E(B)$.

Démonstration.

i) On raisonne par contraposée en supposant que $|V_1 \cap V_2| \geq 2$. Soit $\Gamma_3 = \Gamma(V_1 \cup V_2)$. Puisque $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$, le sous-graphe Γ_3 est connexe (on se réfère ici à un résultat démontré au chapitre 1 selon lequel pour deux sous-graphes connexes ayant des sommets communs, leur réunion est encore connexe). Soit $z \in V_1 \cap V_2$; notre hypothèse impose que $(V_1 \cap V_2) \setminus \{z\} \neq \emptyset$. Donc la suppression de z ne déconnecte pas le sous-graphe Γ_3 qui est donc sans sommet d'articulation. Par maximalité des blocs B_1 et B_2 , tous deux contenus dans Γ_3 qui est à la fois connexe et sans sommet d'articulation, on a nécessairement $\Gamma_3 = B_1$ et $\Gamma_3 = B_2$ d'où la conclusion requise $B_1 = B_2$.

ii) Soit x un sommet d'articulation de Γ . Par définition, $\Gamma - x = \Gamma(V \setminus \{x\})$ n'est pas connexe donc il existe deux sommets y, y' de $\Gamma - x$ non connectés. Par connexité de Γ , il existe une chaîne élémentaire C_0 dans Γ de y à y' . Il est clair que C_0 passe forcément par x puisque y et y' ne sont pas reliés dans $\Gamma - x$. La chaîne C_0 se décompose en $C_0 = C \cup C'$ où C va de y à x et C' de x à y' . Le sommet z (respectivement z') adjacent à x sur la chaîne C (respectivement C') n'est pas relié à z'

(respectivement z) dans $\Gamma - x$. Donc z et z' sont dans deux composantes connexes distinctes de $\Gamma - x$. Le sous-graphe $\Gamma(\{x, z\})$ (respectivement $\Gamma(\{x, z'\})$) à deux sommets est connexe et sans sommet d'articulation, il est donc contenu dans un bloc B (respectivement B') de Γ (voir remarque ci-dessus). Comme z et z' ne sont pas reliés dans $\Gamma - x$, ils ne le sont pas dans $(B \cup B') - x$, donc x est un sommet d'articulation du graphe $B \cup B'$. Ainsi on ne peut pas avoir $B = B'$ car autrement, $B \cup B' = B$ n'aurait pas de sommet d'articulation. D'où $B \neq B'$ et x appartient à deux blocs différents.

Réciproquement, soit x appartenant à deux blocs distincts B et B' de Γ . Alors, d'une part $B \cup B'$ est connexe et d'autre part $B \cup B'$ possède un sommet d'articulation z par la propriété de maximalité des blocs B et B' . Ce sommet z est forcément égal à x . Sinon, on peut le supposer, sans perte de généralité, dans $B - x$. Alors $B - z$ est connexe (un bloc n'a pas de sommet d'articulation) et B' est connexe, donc $(B \cup B') - z$ est connexe puisque x , qui est différent de z , est sommet de B et B' . Cela montre que z n'est pas sommet d'articulation de $B \cup B'$, contradiction. Par suite $x = z$ est un sommet d'articulation de $B \cup B'$. Soient $y \in V(B)$ et $y' \in V(B')$ des sommets adjacents à x respectivement dans B et B' . Si x n'était pas un sommet d'articulation de Γ , il existerait une chaîne élémentaire C reliant y à y' évitant x . En refermant la chaîne par les arêtes $\{y', x\}$ et $\{x, y\}$, on obtient un cycle élémentaire C' passant par x et traversant les blocs B et B' , une contradiction en tenant compte de la remarque 4.2.1.

iii) Soit $a = \{x, y\} \in E$ une arête. Le sous-graphe $\Gamma(\{x, y\})$ à deux sommets est clairement connexe et sans sommet d'articulation. Par la remarque ci-dessus, il est contenu dans un bloc B dont a est une arête. Par le point ii), a ne peut appartenir à plusieurs blocs, donc B est le seul bloc de Γ contenant a . $\square$

La figure 4.3 donne un exemple de la décomposition d'un graphe en blocs.

Exercice 4.2. Montrer que tout graphe connexe ayant au moins deux sommets possède au moins deux sommets qui ne sont pas des sommets d'articulation.

Indication : utiliser la proposition 2.2.5 et la proposition 2.2.6.

En partant des blocs et des sommets d'articulation d'un graphe $\Gamma = (V; E)$ on peut définir un graphe de la manière suivante :

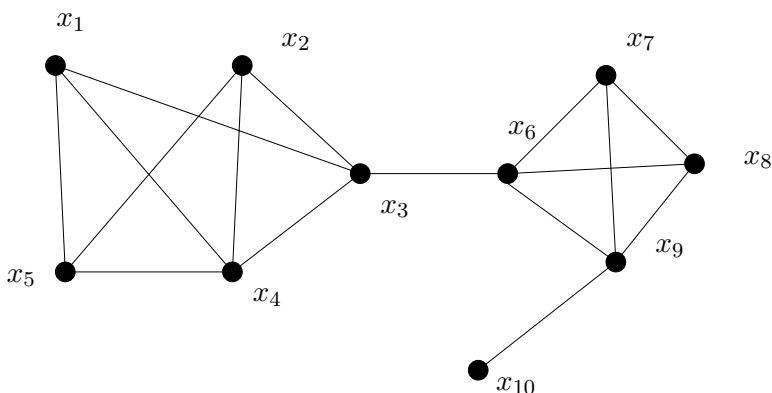


Figure 4.3 – Un graphe $\Gamma = (V; E)$ comportant 4 blocs. Les blocs sont $B_1 = \Gamma(\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\})$, $B_2 = \Gamma(\{x_3, x_6\})$, $B_3 = \Gamma(\{x_6, x_7, x_8, x_9\})$ et $B_4 = \Gamma(\{x_9, x_{10}\})$.

- les sommets sont les blocs d’une part et les sommets d’articulation de Γ d’autre part (s’il y en a) ;
- on met une arête entre un sommet d’articulation x et un bloc B si $x \in B$.

Ce graphe est appelé **graphe des blocs** de Γ et noté $\mathfrak{b}(\Gamma)$. Si Γ possède au moins deux blocs, $\mathfrak{b}(\Gamma)$ est un graphe biparti.

Une chaîne entre deux sommets de Γ est une succession de chaînes entre deux sommets d’un même bloc, le passage éventuel entre deux blocs se faisant par l’unique sommet d’articulation de Γ commun à ces deux blocs (voir le lemme 4.2.3). À une chaîne de Γ entre deux sommets x, x' d’un même bloc B correspond soit la chaîne élémentaire sur trois sommets $x, \{x, B\}, B, \{B, x'\}, x'$ dans $\mathfrak{b}(\Gamma)$ si x et x' sont des sommets d’articulation de Γ , soit la chaîne élémentaire sur deux sommets $x, \{x, B\}, B$ si x est un sommet d’articulation et x' n’en est pas un, soit la chaîne triviale sur un sommet réduite à B si x et x' ne sont pas des sommets d’articulation. Il s’ensuit qu’à une chaîne élémentaire connectant deux sommets de blocs différents de Γ correspond dans $\mathfrak{b}(\Gamma)$ une succession de chaînes sur trois sommets avec éventuellement à chacune des extrémités une chaîne sur deux sommets comme décrite ci-dessus. Réciproquement, une chaîne élémentaire dans $\mathfrak{b}(\Gamma)$ est issue d’une chaîne élémentaire (pas forcément unique) dans Γ . Cette propriété permet de montrer que la connexité est conservée dans le graphe des blocs.

Lemme 4.2.4. *Soit Γ un graphe connexe. Alors $\mathfrak{b}(\Gamma)$ est connexe et les sommets d'articulation de Γ sont des sommets d'articulation de $\mathfrak{b}(\Gamma)$.*

Démonstration. **$\mathfrak{b}(\Gamma)$ est connexe** : si Γ est un bloc, alors $\mathfrak{b}(\Gamma)$, réduit à un sommet, est connexe. Supposons que Γ admette plusieurs blocs. Puisque Γ est connexe, chaque bloc de Γ contient au moins un sommet d'articulation de Γ . Il suffit donc de montrer que l'on peut relier deux sommets d'articulation x et x' de Γ dans $\mathfrak{b}(\Gamma)$. Une chaîne entre x et x' dans Γ , qui existe par la connexité de Γ , correspond à une chaîne entre x et x' dans $\mathfrak{b}(\Gamma)$, succession de chaînes élémentaires sur trois sommets de $\mathfrak{b}(\Gamma)$. D'où la connexité de $\mathfrak{b}(\Gamma)$.

Soit x un sommet d'articulation de Γ . Comme $\Gamma - x$ n'est pas connexe, il existe deux sommets y, y' de Γ adjacents à x qui ne sont pas connectés dans $\Gamma - x$. Il existe un bloc B (respectivement B') contenant le sous-graphe connexe et sans sommet d'articulation $\Gamma(\{x, y\})$ (respectivement $\Gamma(\{x, y'\})$). Ces deux blocs B et B' se coupent en x (voir lemme 4.2.3). Or $B - x$ et $B' - x$ sont connexes, donc aucun point de $B - x$ n'est connecté à un point de $B' - x$ dans $\Gamma - x$. On a B et B' déconnectés dans $\mathfrak{b}(\Gamma - x)$: s'ils ne l'étaient pas, il y aurait une succession de chaînes sur trois sommets du type $B_1, \{B_1, x_1\}, x_1, \{x_1, B_2\}, B_2$ qui formerait une chaîne de B à B' dans $\mathfrak{b}(\Gamma - x)$. Cette chaîne se relève dans Γ en une chaîne entre y et y' évitant x , contradiction. On a donc établi que $\mathfrak{b}(\Gamma - x)$ n'est pas connexe, donc que x est un sommet d'articulation de $\mathfrak{b}(\Gamma)$. $\square$

Cela permet d'obtenir la propriété suivante.

Proposition 4.2.5. *Soit Γ un graphe connexe, alors son graphe des blocs $\mathfrak{b}(\Gamma)$ est un arbre.*

Démonstration. On a déjà vu dans le lemme que $\mathfrak{b}(\Gamma)$ est connexe. Il reste à établir que Γ n'a pas de cycle. Par l'absurde, supposons qu'il existe un cycle élémentaire C dans $\mathfrak{b}(\Gamma)$. Ce cycle serait pair car $\mathfrak{b}(\Gamma)$ est biparti. Deux au moins des sommets du cycle C dans $\mathfrak{b}(\Gamma)$ seraient des sommets d'articulation x et y de Γ . Or dans un cycle la suppression de l'un ou l'autre des sommets ne déconnecte pas les sommets de ce cycle. D'où x et y ne seraient pas des sommets d'articulation de $\mathfrak{b}(\Gamma)$, contradiction avec le lemme précédent. $\square$

Corollaire 4.2.6. *Soit Γ un graphe connexe ayant au moins un sommet d'articulation (donc au moins trois sommets). Alors il existe au moins deux blocs contenant chacun un seul sommet d'articulation de Γ .*

Démonstration. Comme Γ admet au moins un sommet d'articulation, il possède au moins deux blocs, donc $\mathfrak{b}(\Gamma)$ a au minimum trois sommets, en l'occurrence le sommet d'articulation et les deux blocs. Comme $\mathfrak{b}(\Gamma)$ est un arbre, d'après la proposition 2.2.6 il contient au moins deux feuilles x_1, x_2 correspondant aux arêtes pendantes $p_i = (\{B_i, x_i\}; \{B_i, x_i\})$, $i = 1, 2$: B_i , qui correspond à un bloc dans Γ , est le sommet de degré 1 dans $\mathfrak{b}(\Gamma)$ de la feuille x_i , il est rattaché au reste du graphe par son unique arête incidente $\{B_i, x_i\}$ où x_i est un sommet d'articulation du bloc B_i dans Γ . Notons que l'on peut avoir $x_1 = x_2$. Ces feuilles sont en outre des blocs dans $\mathfrak{b}(\Gamma)$ puisque le fait de retirer x_i déconnecte B_i du reste du graphe dans $\mathfrak{b}(\Gamma)$. Cela signifie que le sommet B_i dans $\mathfrak{b}(\Gamma)$ est adjacent au seul sommet d'articulation x_i . Les sommets de B_i autres que x_i ne sont pas des sommets d'articulation. Les deux blocs B_1 et B_2 possèdent donc chacun un seul sommet d'articulation de Γ . $\square$

Exercice 4.3. Dessiner le graphe des blocs du graphe de la figure 4.3.

Nous allons maintenant donner des caractérisations de la k -sommet-connexité et de la k -arête-connexité en terme de chaînes disjointes. Elles sont dues à WHITNEY(1932) dont nous prouverons le théorème à la fin de ce chapitre.

Le théorème suivant caractérise les graphes 2-sommet-connexes, non plus en terme de connexité, mais en terme de cycles.

Théorème 4.2.7. *Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe simple et connexe ayant au moins trois sommets. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- a) *Le graphe Γ est 2-sommet-connexe.*
- b) *Par deux sommets quelconques, il passe un cycle élémentaire.*
- c) *Par un sommet et une arête quelconques, il passe un cycle élémentaire.*
- d) *Par deux arêtes quelconques, il passe un cycle élémentaire.*

Démonstration.

- a) $\iff$ b) : cela découle immédiatement de la caractérisation de la k -sommet-connexité donnée ci-dessus.
- d) $\implies$ c) $\implies$ b) : élémentaire.
- b) $\implies$ c) : soit une arête $a = \{x, y\}$ et u un sommet distinct de x et de y . Sur l'arête a rajoutons un sommet v si bien que l'on se retrouve avec deux nouvelles arêtes $\{x, v\}$ et $\{v, y\}$ à la place de a . Le graphe ainsi obtenu, noté Γ' , satisfait la propriété b), donc est 2-connexe d'après l'implication b) $\implies$ a). Par l'implication

réciproque, il s'ensuit qu'il passe par u et v (donc par x et y) un cycle élémentaire. En recollant les deux arêtes $\{x, v\}$ et $\{v, y\}$ et en supprimant le sommet v , cela donne un cycle élémentaire de Γ empruntant l'arête a et passant par u .

- b) $\implies$ d) : même raisonnement que ci-dessus en considérant le graphe Γ' obtenu en scindant deux arêtes a et b au lieu d'une. $\square$

Exercice 4.4. Compléter le théorème 4.2.7 en démontrant que la 2-connexité est équivalente à chacune des deux assertions suivantes :

- e) par trois sommets x, y et z quelconques, il passe toujours un cycle élémentaire ;
- f) pour trois sommets x, y et z quelconques, il existe un cycle élémentaire passant par x à y et évitant z .

Le théorème 4.2.7, notamment la caractérisation b) de la 2-connexité, fournit un algorithme permettant de construire des graphes 2-sommet-connexes. Cette méthode est désignée par l'expression **méthode des chaînes**. Elle se déroule en effet ainsi :

Étape 1 : on part d'un cycle Γ_1 .

Étape 2 : à ce cycle, on ajoute une chaîne élémentaire de longueur arbitraire dont les seuls sommets en commun avec le cycle initial sont les extrémités (distinctes) de cette chaîne. On obtient un graphe Γ_2 qui reste 2-connexe.

Étape n : au graphe Γ_{n-1} , on ajoute une chaîne élémentaire dont les seuls sommets en commun avec Γ_{n-1} sont les extrémités de cette chaîne. Cela donne un graphe 2-connexe Γ_n .

Le résultat de cette méthode est présenté en figure 4.4. L'intérêt de cette méthode réside principalement dans le fait qu'elle permet de construire a priori tous les graphes d'ordre fini 2-connexes. C'est le sens du résultat énoncé à la proposition 4.2.8.

Proposition 4.2.8. *Soit Γ un graphe simple ayant au moins 3 sommets. Alors Γ est 2-sommet-connexe si et seulement si on peut le construire grâce à la méthode des chaînes.*

Démonstration. D'après le théorème 4.2.7 le graphe construit par la méthode des chaînes est 2-sommet-connexe : procédons par récurrence sur le nombre d'étapes nécessaires n pour aboutir par la méthode des chaînes au graphe Γ . Si $n = 1$, alors le graphe est un cycle donc est 2-connexe.

Supposons que n étapes aient été effectuées pour obtenir le graphe Γ . Soit C la chaîne d'extrémités u et v ajoutée à la n -ième et dernière étape

au graphe Γ_{n-1} . Soient x et y deux sommets de Γ . Si x et y étaient déjà présents à l'étape précédente, l'hypothèse de récurrence s'applique. Si x était présent à l'étape $n-1$ et y a été créé à l'étape n (voir figure 4.5) : par u, v et x , sommets de Γ_{n-1} , il passe un cycle élémentaire (caractérisation e) de la 2-connexité). En ne considérant que la partie de ce cycle joignant u à v et passant par x , et en lui adjoignant la chaîne C , on obtient un cycle élémentaire passant par x et y . Si x et y sont tous deux sur C , il suffit de prendre une chaîne élémentaire joignant u à v et de la concaténer avec la chaîne C . Cela prouve que Γ satisfait à la caractérisation b) de la 2-connexité du théorème 4.2.7.

Réciproquement, si $\Gamma = (V; E)$ est 2-sommet-connexe, avec $|V| \geq 3$, il contient un cycle C (sinon ce serait un arbre). Soit $\Gamma' = (V'; E')$

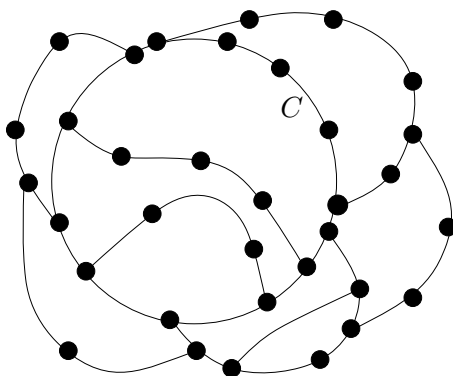


Figure 4.4 – Construction d'un graphe 2-connexe par la méthode des chaînes. Le cycle C est le cycle de départ.

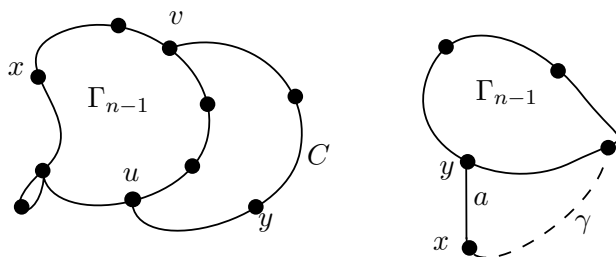


Figure 4.5 – Illustration de la méthode des chaînes.

un sous-graphe maximal dans l'ensemble des sous-graphes de Γ pouvant être obtenus par la méthode des chaînes à partir de C . Supposons que $V' \neq V$; le graphe Γ étant connexe, il existe une arête $a = \{x, y\} \in E$ tel que $x \in V \setminus V'$ et $y \in V'$; le graphe Γ est 2-sommet-connexe donc $\Gamma - y$ est connexe; il existe donc une chaîne élémentaire γ joignant x à l'un des sommets t de V' ; en prenant γ de longueur minimum, on peut supposer que t est le seul sommet de γ qui soit dans V' (voir figure 4.5).

Alors $a \cup \gamma$ est une chaîne entre y et t ne rencontrant V' qu'à ses extrémités (et contenant $x \notin V'$). La possibilité d'ajouter à Γ' une nouvelle chaîne selon la méthode des chaînes contredit la maximalité de Γ' . Donc $V' = V$.

De plus toute arête de Γ est dans Γ' , pouvant être vue comme une chaîne élémentaire à extrémités dans Γ' . $\square$

4.3 Graphes 2-arête-connexes

Voyons d'abord comment caractériser les isthmes.

Lemme 4.3.1. *Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe simple. Une arête est un isthme si et seulement si par cette arête il ne passe aucun cycle élémentaire.*

Démonstration. Si $a = \{x, y\}$ n'est pas un isthme, sa suppression ne déconnecte pas le graphe. Ainsi il existe une chaîne élémentaire de x à y (voir l'exercice 1.1), donc en ajoutant l'arête $\{x, y\}$, on crée un cycle élémentaire qui passe par a .

Inversement s'il passe un cycle élémentaire par $a = \{x, y\}$ la suppression de cette arête ne peut déconnecter le graphe, donc a n'est pas un isthme. $\square$

Un graphe 2-arête-connexe est un graphe connexe sans isthme.

Corollaire 4.3.2. *Un graphe connexe $\Gamma = (V; E)$ ayant au moins trois sommets est 2-arête-connexe si et seulement si par toute arête il passe un cycle élémentaire.*

Démonstration. c'est une application directe du lemme précédent. $\square$

Comme pour la méthode des chaînes dans le cas des graphes 2-sommet-connexes, il existe une méthode des chaînes qui permet d'engendrer les graphes 2-arête-connexes.

Étape 1 : on part d'un cycle Γ_1 (celui-ci existe d'après ci-dessus).

Étape 2 : à ce cycle on rajoute une chaîne simple élémentaire dont les seuls sommets en commun avec ce cycle sont les extrémités x et y , la différence avec la méthode des chaînes des graphes 2-sommet-connexes décrite précédemment est que l'on autorise $x = y$. On obtient un graphe Γ_2 .

Étape n : au graphe Γ_{n-1} on ajoute une chaîne élémentaire dont les seuls sommets en commun avec Γ_i sont les extrémités (pouvant être éventuellement égales). Cela fournit un graphe Γ_n 2-arête-connexe. De la même manière que pour les graphes 2-sommet-connexes, on a :

Théorème 4.3.3. *Un graphe connexe Γ est 2-arête-connexe si et seulement s'il peut être construit par la méthode des chaînes version arête.*

Exercice 4.5. Faire la preuve du théorème 4.3.3 (elle est similaire à celle du théorème 4.2.8).

Rappelons qu'un graphe connexe $\Gamma = (V; E)$ est orientable s'il existe une orientation des arêtes de telle sorte que le graphe orienté obtenu soit fortement connexe.

Théorème 4.3.4. *Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe simple connexe ayant au moins trois sommets. Le graphe Γ est 2-arête-connexe si et seulement s'il est orientable.*

Démonstration. Si le graphe est orientable, d'après le théorème 1.3.3 par chaque arête il passe au moins un cycle, donc un cycle élémentaire (voir l'exercice 1.1). D'après le corollaire 4.3.2, le graphe est 2-arête-connexe. Supposons que le graphe soit 2-arête-connexe. D'après le corollaire 4.3.2, par chaque arête, il passe un cycle élémentaire C . On choisit une orientation arbitraire de C . Si Γ coïncide avec le cycle C , alors Γ est un circuit et le résultat est prouvé. Sinon, il existe un sommet $x \notin C$ adjacent à un sommet y du circuit C . L'arête $a = \{x, y\}$ est sur une chaîne élémentaire qui, partant de y quitte C et revient sur C pour la première fois en un sommet t (t pouvant être égal à y , voir théorème 4.3.3). On oriente cette chaîne élémentaire de telle sorte que l'orientation soit compatible avec celle de C préalablement choisie afin d'obtenir un cycle empruntant l'arête a . Le sous-graphe orienté que l'on obtient, noté Γ_2 , est fortement connexe. À la n -ième étape, on considère une arête $a = \{x, y\}$, où y est un sommet de Γ_{n-1} et x n'est pas sur Γ_{n-1} . Cette arête est sur une chaîne élémentaire d'extrémités y et t sur Γ_{n-1} . Cette chaîne peut être orientée de sorte que l'arête a soit sur un circuit du nouveau graphe obtenu Γ_n .

On itère le processus jusqu'à épuisement de toutes les arêtes. $\square$

4.4 Flots dans un réseau

Intuitivement un « flot » dans un réseau peut-être vu comme l'écoulement d'une substance le long des arêtes d'un graphe. Ainsi la circulation de pétrole dans un système de pipelines, d'eau dans des conduites, d'électricité dans les câbles, d'appels téléphoniques, de courriers électroniques, d'informations dans l'internet ou de véhicules peut être modélisée par un flot dans un réseau. La théorie des flots est ainsi devenue un aspect important de la théorie des graphes. Comme nous le verrons, cette théorie a aussi des applications dans d'autres domaines.

4.4.1 Définitions

Un **réseau** $\mathcal{R}$ est un digraphe simple (c'est-à-dire sans multi-arc, ni boucle) d'ordre fini $\Gamma = (V; \vec{E})$ ayant une source s et un puits p tels qu'il existe

- i) au moins un chemin de s à p ;
- ii) et une valuation $c : \vec{E} \rightarrow \mathbb{N}$ appelée **capacité**.

Ce réseau sera noté $\mathcal{R} = (V; \vec{E}, s, p, c)$.

Une **coupe** du réseau $\mathcal{R} = (V; \vec{E}, s, p, c)$ est la donnée d'une partition $V = X \sqcup \bar{X}$ de V telle que $s \in X$ et $p \in \bar{X}$. On notera la coupe simplement $(X, \bar{X})$. La **capacité de la coupe** $(X, \bar{X})$, notée $c(X, \bar{X})$ est la somme des capacités des arcs $a \in \vec{E}$ allant de X à $\bar{X}$:

$$c(X, \bar{X}) = \sum_{\substack{a \in \vec{E} \\ i(a) \in X, t(a) \in \bar{X}}} c(a),$$

où les fonctions i et t sont définies au § 1.3.

Une coupe $(X, \bar{X})$ est appelée **coupe minimum** si sa capacité est minimum : pour toute coupe $(X', \bar{X}')$ de $\mathcal{R}$, on a

$$c(X, \bar{X}) \leq c(X', \bar{X}').$$

Une application $f : \vec{E} \rightarrow \mathbb{R}$ est un **flot** dans le réseau $\mathcal{R}$ si elle satisfait aux propriétés suivantes :

- a) **Contrainte de capacité** : pour tout $a \in \vec{E}$

$$0 \leq f(a) \leq c(a).$$

b) **Conservation du flot** : pour tout $x \in V \setminus \{s, p\}$

$$\sum_{\substack{a \in \vec{E} \\ t(a)=x}} f(a) = \sum_{\substack{a \in \vec{E} \\ i(a)=x}} f(a).$$

Cette condition exprime le fait que flot entrant et flot sortant en un sommet quelconque x sont égaux.

Un exemple très parlant est celui d'un réseau routier : les carrefours sont représentés par les sommets du réseau, chaque route entre deux carrefours étant représentée par une arête orientée ; si la route est à double sens on met un arc dans chaque sens ; la capacité peut signifier, par exemple, le nombre maximum de véhicules dont la circulation peut être absorbée par le tronçon routier sur une période d'une heure. Dans ce cas, on s'intéresse plus précisément à la circulation des véhicules sur les différents itinéraires permettant d'aller du point s vers le point p .

Soient $X, Y \subseteq V$. On définit le sous-ensemble de $\vec{E}$:

$$\vec{E}(X, Y) = \{a \in \vec{E} : i(a) \in X, t(a) \in Y\}.$$

Lorsque $X = \{x\}$ et $Y = \{y\}$ sont des singletons, on écrit simplement $\vec{E}(X, Y) = \vec{E}(x, y)$, qui est éventuellement vide s'il n'y a pas d'arc entre x et y . Si a est l'arc (x, y) , alors on pourra écrire $f(x, y)$ pour $f(a)$. Cela permet de prolonger la fonction flot à toute paire (X, Y) de sous-ensembles de V en posant :

$$f(X, Y) = \sum_{a \in \vec{E}(X, Y)} f(a) - \sum_{a \in \vec{E}(Y, X)} f(a)$$

On voit immédiatement que $f(X, Y) \in \mathbb{R}$, $f(X, Y) = -f(Y, X)$ et $f(X, X) = 0$ pour tous $X, Y \subseteq V$. En outre, en posant $f(x, V)$ pour $f(\{x\}, V)$:

$$\forall x \in V, \quad f(x, V) = \sum_{a \in \vec{E} : i(a)=x} f(a) - \sum_{a \in \vec{E} : t(a)=x} f(a)$$

donc $f(x, V) = 0$ si $x \neq s, p$, d'après la conservation du flot. Cela donne également $f(V, x) = 0$ si $x \neq s, p$. De plus :

$$-f(s, V) = \sum_{a \in \vec{E} : i(a)=s} f(a).$$

$$- f(V, p) = \sum_{a \in \vec{E} : t(a)=p} f(a).$$

Proposition 4.4.1. *Pour toute coupe $(X, \bar{X})$ dans le réseau $\mathcal{R}$ on a :*

$$f(X, \bar{X}) = f(s, V) = f(V, p).$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} f(X, \bar{X}) &= f(X, V \setminus X) = f(X, V) - f(X, X) \\ &= f(X, V) = f(s, V) + f(X \setminus s, V). \end{aligned}$$

Or si $x \in X \setminus s$, on a $x \neq s, p$, donc $f(x, V) = 0$ et par suite $f(X \setminus s, V) = 0$, d'où finalement $f(X, \bar{X}) = f(s, V)$. On raisonne de façon analogue pour obtenir l'autre égalité :

$$f(X, \bar{X}) = f(V, \bar{X}) = f(V, p) - f(V, \bar{X} \setminus p) = f(V, p),$$

car $f(V, x) = 0$ si $x \neq s, p$. □

La valeur commune des $f(X, \bar{X})$ sera appelée **valeur totale du flot** notée $\omega(f)$. Un flot f est dit **maximum** dans $\mathcal{R}$ s'il est de valeur totale maximum : $\omega(f) \geq \omega(f')$ pour tout flot f' dans $\mathcal{R}$.

On obtient donc les expressions suivantes pour le calcul d'un flot f dans un réseau.

Corollaire 4.4.2. *Soit $\mathcal{R}$ un réseau et f un flot dans ce réseau. Alors*

$$\omega(f) = \sum_{a \in \vec{E} : i(a)=s} f(a) = \sum_{a \in \vec{E} : t(a)=p} f(a).$$

Si $(X, \bar{X})$ est une coupe dans $\mathcal{R}$, alors

$$\omega(f) = \sum_{i(a) \in X, t(a) \in \bar{X}} f(a) - \sum_{t(a) \in X, i(a) \in \bar{X}} f(a).$$

Démonstration. Ces formules traduisent simplement les identités $\omega(f) = f(s, V) = f(V, p) = f(X, \bar{X})$. □

Exemple 4.4.3. On a représenté un flot dans un réseau en figure 4.6. La valeur sur chaque arc représente le flot ; le nombre entre parenthèses représente la capacité de chaque arc. La valeur totale du flot est $\omega(f) = 14 + 10 + 2 + 4 - 1 + 5 = 34$. On a une coupe $X = \{s, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ et $\bar{X} = \{x_7, x_8, x_9, x_{10}, p\}$. La capacité de cette coupe est $c(X, \bar{X}) = 17 + 13 + 4 + 4 + 6 = 44$.

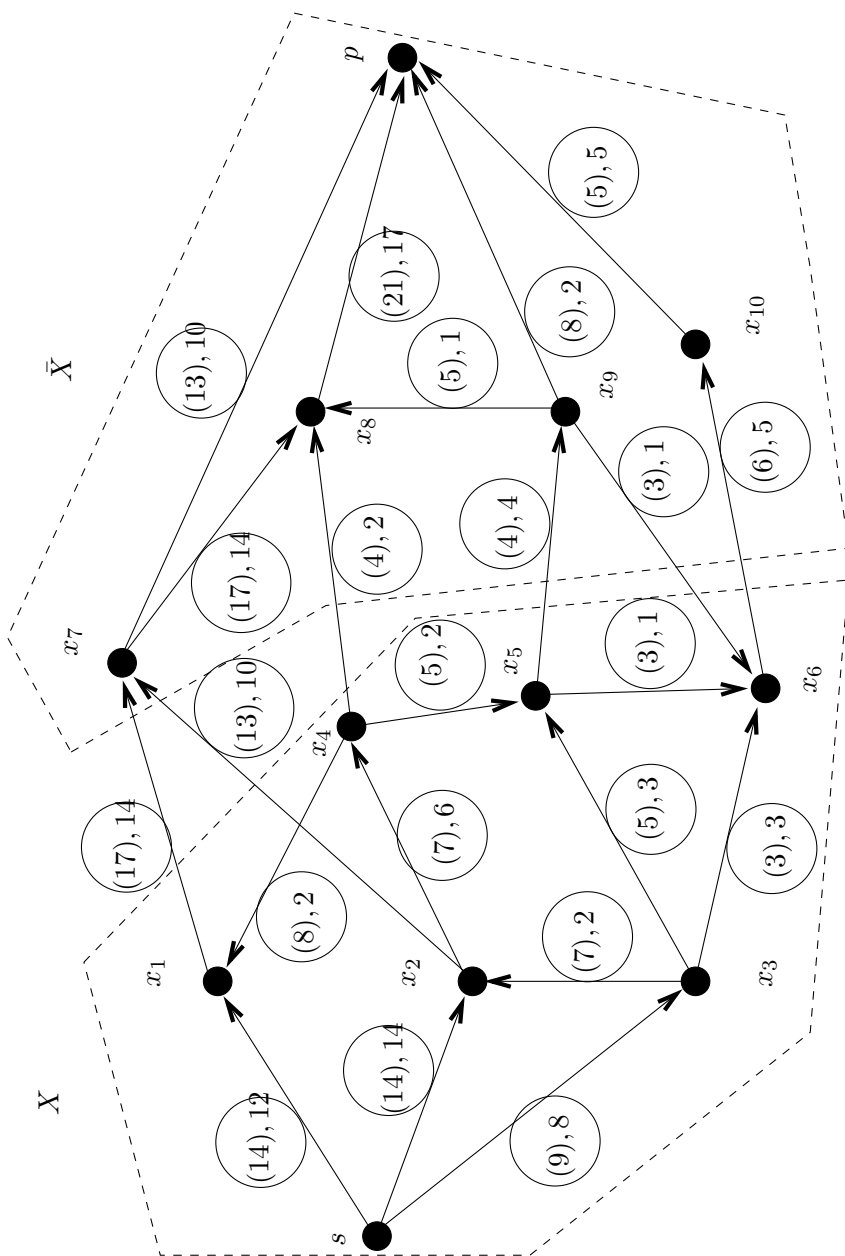


Figure 4.6 – Exemple de flot dans un réseau.

Remarque 4.4.4. i) On peut avoir un digraphe avec plusieurs sources $(s_i)_{i \in \{1,2,\dots,k\}}$ et plusieurs puits, $(p_j)_{j \in \{1,2,\dots,l\}}$. On se ramène à un réseau de la manière suivante : on ajoute un sommet s , que l'on considère comme **supersource**, et un arc (s, s_i) avec une capacité infinie (ou suffisamment grande) pour tout $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. On procède de la même manière avec les puits en ajoutant un **superpuits** p et des arcs (p_j, p) , $j \in \{1, 2, \dots, l\}$, avec des capacités appropriées.

ii) Lorsqu'on s'intéresse à ce qui se passe d'un sommet x à un sommet y d'un digraphe, on peut ajouter un sommet s , un arc de s à x , un sommet p et un arc de y à p : cela fournit un réseau ; de la sorte, tout chemin de s à p induit un chemin de x à y .

4.4.2 Le théorème de FORD et FULKERSON

D'après l'axiome de contrainte de capacité du flot, on a :

$$\omega(f) = f(X, \overline{X}) \leq c(X, \overline{X})$$

pour toute coupe $(X, \overline{X})$ dans $\mathcal{R}$. Par conséquent la valeur totale du flot est toujours inférieure ou égale à la plus petite capacité possible d'une coupe.

Le théorème de FORD et FULKERSON montre qu'il existe toujours un flot maximum qui atteint cette borne. Avant de démontrer ce théorème nous avons besoin de la notion de « chaîne améliorable ».

Soit f un flot dans un réseau $\mathcal{R} = (V; \overrightarrow{E}, s, p, c)$. Si C est une chaîne élémentaire reliant s à p (il y en a d'après la définition) dans le graphe sous-jacent de $\mathcal{R}$, une arête de C orientée de s vers p dans $\mathcal{R}$ sera appelée **arc positif** de C , tandis qu'une arête de C orientée de p vers s dans $\mathcal{R}$ sera appelée **arc négatif** de C . Une chaîne C de s à p dans le graphe sous-jacent de $\mathcal{R}$ est dite **améliorable** si le flot de chaque arc positif peut être augmenté tout en respectant la capacité de l'arc et si le flot de chaque arc négatif peut être diminué (c'est-à-dire est strictement positif).

Ainsi, dans une chaîne améliorable C de s à p , on a :

- $f(a) < c(a)$ pour tout arc positif a de C ;
- $f(a) > 0$ pour tout arc négatif a de C .

Par exemple, en figure 4.6, les chaînes suivantes de s à p sont améliorables :

- $s, x_3, x_5, x_6, x_{10}, p$;
- $s, x_3, x_5, x_4, x_8, x_9, p$;
- s, x_1, x_7, x_8, p ;
- s, x_1, x_7, p .

Soit C une chaîne améliorable de s à p dans un réseau $\mathcal{R}$. On définit la quantité Δ_a de la manière suivante :

$$\Delta_a = \begin{cases} c(a) - f(a) & \text{si } a \text{ est un arc positif de } C, \\ f(a) & \text{si } a \text{ est un arc négatif de } C. \end{cases}$$

On notera $\Delta_C = \min_{a \in C} \{\Delta_a\}$.

Proposition 4.4.5. *Soit f un flot dans un réseau $\mathcal{R} = (V; \vec{E}, s, p, c)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) f est un flot maximum.
- ii) $\mathcal{R}$ ne contient pas de chaîne améliorable de s à p .
- iii) Il existe une coupe $(X, \overline{X})$ telle que $\omega(f) = c(X, \overline{X})$.

Démonstration. i) $\Rightarrow$ ii) : soit f un flot maximum de $\mathcal{R}$.

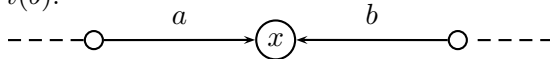
Supposons, par l'absurde, qu'il existe une chaîne C améliorable de s à p . Soit $f' : \vec{E} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$f'(a) = \begin{cases} f(a) + \Delta_C & \text{si } a \text{ est un arc positif de } C, \\ f(a) - \Delta_C & \text{si } a \text{ est un arc négatif de } C, \\ f(a) & \text{si } a \text{ n'est pas un arc de } C. \end{cases}$$

Alors f' est un flot de $\mathcal{R}$ car $f(a) - \Delta_C \geq 0$. Ainsi l'axiome de contrainte de capacité est vérifié.

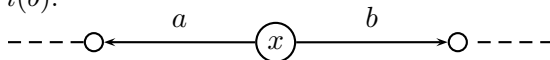
On doit maintenant montrer que f' satisfait à la propriété de conservation du flot. Soit $x \in V \setminus \{s, p\}$. Si x n'est pas sur C , il n'y a rien à montrer car les flots des arcs incidents à x ne sont pas modifiés. Soient maintenant $x \neq s, p$ sur C et a, b , dans cet ordre sur C , les arcs incidents à x sur C . Il s'agit de montrer que $f'(x, V) = 0$. Nous avons quatre cas :

- $t(a) = x = t(b)$.



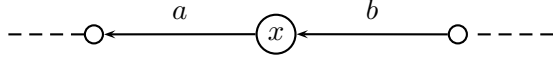
Donc a est un arc positif et b un arc négatif. Par conséquent $f'(a) = f(a) + \Delta_C$ et $f'(b) = f(b) - \Delta_C$, et ainsi $f'(x, V) = f(x, V) + \Delta_C - \Delta_C = 0$;

- $i(a) = x = i(b)$.



Donc a est un arc négatif et b un arc positif. Par suite $f'(a) = f(a) - \Delta_C$ et $f'(b) = f(b) + \Delta_C$. Ainsi $f'(x, V) = f(x, V) - \Delta_C + \Delta_C = 0$;

- $i(a) = x = t(b)$.



Donc a et b sont des arcs négatifs. D'où $f'(a) = f(a) - \Delta_C$ et $f'(b) = f(b) - \Delta_C$. On a donc

$$\sum_{\substack{a' \in \vec{E} \\ t(a')=x}} f'(a') = \sum_{\substack{a' \in \vec{E} \setminus a \\ t(a')=x}} f(a') + f'(a) = \sum_{\substack{a' \in \vec{E} \setminus a \\ t(a')=x}} f(a') + f(a) - \Delta_C.$$

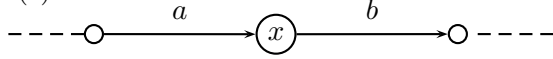
De la même manière

$$\sum_{\substack{a' \in \vec{E} \\ i(a')=x}} f'(a') = \sum_{\substack{a' \in \vec{E} \setminus b \\ i(a')=x}} f(a') + f(b) - \Delta_C.$$

D'où

$$f'(x, V) = \sum_{a' \in \vec{E} : t(a')=x} f'(a') - \sum_{a' \in \vec{E} : i(a')=x} f'(a') = f(x, V) = 0.$$

- $t(a) = x = i(b)$.



Donc a et b sont des arcs positifs. On conclut comme ci-dessus que $f'(x, V) = 0$.

Nous devons maintenant montrer que le flot a augmenté de Δ_C . Tout arc incident à s (respectivement à p) est un arc dont le sommet initial (respectivement terminal) est s (respectivement p). Par conséquent l'arc a (respectivement a') de C qui a s (respectivement p) comme sommet initial (respectivement terminal) a une valeur de flot $f'(a) = f(a) + \Delta_C$ (respectivement $f'(a') = f(a') + \Delta_C$. D'où $f'(s, V) = f(s, V) + \Delta_C = f'(V, p) = f'(V, p) + \Delta_C$. D'où f n'est pas maximum, contradiction. Il n'existe donc pas de chaîne améliorable de s à p .

ii) $\Rightarrow$ iii) : **supposons qu'il n'y ait pas de chaîne améliorable de s à p dans $\mathcal{R}$. Soit**

$$X = \{s\} \cup \{x \in V \text{ tel qu'il existe une chaîne améliorable de } s \text{ à } x\}.$$

Alors $(X, \overline{X})$ est une coupe de $\mathcal{R}$ car par hypothèse $p \notin X$. Ainsi pour tout arc a tel que $i(a) \in X$ et $t(a) \in \overline{X}$, on a $f(a) = c(a)$ et pour tout arc a' tel que $t(a') \in X$ et $i(a') \in \overline{X}$, on a $f(a) = 0$. Par conséquent, d'après le corollaire 4.4.2,

$$\omega(f) = f(X, \overline{X}) = \sum_{i(a) \in X, t(a) \in \overline{X}} f(a) = c(X, \overline{X}).$$

iii) $\Rightarrow$ i) : puisqu'on a toujours $\omega(f) \leq c(X', \overline{X'})$ pour toute coupe $(X', \overline{X'})$, on conclut ici que $\omega(f)$ est maximum et que $(X, \overline{X})$ est une coupe minimum. $\square$

Corollaire 4.4.6. Soit $\mathcal{R} = (V; \overrightarrow{E}, s, p, c)$ un réseau. Alors il existe un flot maximum f dans $\mathcal{R}$ tel que, pour tout arc $a \in \overrightarrow{E}$, on ait $f(a) \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Soit f_0 le flot dans $\mathcal{R}$ tel que pour tout arc $a \in \overrightarrow{E}$, $f_0(a) = 0$. Soit ce flot est maximum et c'est terminé, soit il existe une chaîne améliorable C de s à p . La valeur Δ_C introduite avant la proposition 4.4.5 est une valeur entière car $c : \overrightarrow{E} \rightarrow \mathbb{N}$, par conséquent le flot f' construit comme dans la preuve de la proposition 4.4.5 est à valeur entière. Soit il est maximum et c'est terminé soit il ne l'est pas. Auquel cas on réitère le processus jusqu'à obtenir un flot maximum entier. $\square$

La proposition 4.4.5 entraîne le résultat fondamental suivant :

Théorème 4.4.7 (FORD et FULKERSON, 1956). La valeur totale maximum d'un flot sur un réseau $\mathcal{R}$ est égale à la capacité d'une coupe minimum.

L'algorithme ci-dessous est dû à FORD et FULKERSON. Il a été amélioré par EDMONDS et KARP en 1972. Il fournit à partir d'un réseau un flot f maximum et une coupe $(X, \overline{X})$ minimum. On aura en particulier $\omega(f) = c(X, \overline{X})$.

L'algorithme de FORD et FULKERSON, dans sa version initiale, se déroule ainsi : on se donne un réseau $\mathcal{R} = (V; \overrightarrow{E}, s, p, c)$ et on initialise le flot sur les arcs à 0.

i) On pose

$$X = \{s\} \cup \{x \in V : \text{il y a une chaîne améliorable de } s \text{ vers } x\}.$$

Si $p \notin X$, alors f est un flot maximum et $(X, \overline{X})$ est une coupe minimum.

ii) Sinon, on sélectionne une chaîne améliorable C . On détermine l'écart minimal Δ_C sur cette chaîne. Puis on met à jour la valeur du flot sur C en remplaçant $f(a)$ par $f(a) + \Delta_C$ ou $f(a) - \Delta_C$ selon que a est un arc positif ou négatif de C . On retourne alors à l'étape initiale.

L'amélioration de EDMONDS et KARP réside dans la façon dont on sélectionne les chemins améliorables au fur et à mesure du déroulement de l'algorithme de façon à réduire le nombre d'itérations. Voici ce que cela donne :

FordFulkerson

Entrée : réseau $\mathcal{R} = (V; \vec{E}, N, s, p, c)$.

Sortie : flot maximum f ; coupe minimum $(X, \overline{X})$.

“Initialisation”

Pour Tout $a, a \in \vec{E}$ **Faire**

$f(a) = 0$; (initialisation du flot sur les arcs)

Fin Pour

$l(s) = (+, \infty)$; (labellisation de s , le signe donne la direction de l'arc ayant s comme sommet initial, le nombre donne la valeur d'augmentation du flot)

Pour Tout $x, x \in V$ **Faire**

$u(x) = \text{faux}$; (initialisation du marquage des sommets)

$\Delta(x) = \infty$;

Fin Pour

“Calcul itératif de chaînes améliorables et mise à jour du flot”

Répéter

“Calcul d'une chaîne améliorable C ”

Choisir parmi les sommets x tel que $u(x) = \text{faux}$ celui qui a été le premier labellisé ; (ce choix permet d'avoir une chaîne améliorable de plus courte longueur. On utilisera pour cela un parcours en largeur d'abord)

“Calcul de $\Delta(y)$ si $a = [x, y]$ est un arc positif (il est ici plus commode d'indexer sur les sommets plutôt que sur les arcs)”

Pour Tout $a \in \vec{E}$ tel que $i(a) = x$ **Faire**

$y = t(a)$;

Si y n'est pas labellisé **et** $f(a) < c(a)$ **Alors**

$\Delta(y) = \min\{c(a) - f(a), \Delta(x)\}$ **et** $l(y) = (x, +, \Delta(y))$;

Fin Si

Fin Pour

“Calcul de $\Delta(y)$ si $[x, y]$ est un arc négatif”

Pour Tout $a \in \vec{E}$ tel que $t(a) = x$ **Faire**

$y = i(a)$;

Si y n'est pas labellisé **et** $f(a) > 0$ **Alors**

$\Delta(y) = \min\{f(a), \Delta(x)\}$ **et** $l(y) = (x, -, \Delta(y))$;

Fin Si

Fin Pour $u(x) = \text{vrai};$ “Test d’obtention d’une chaîne améliorable C de s vers p ”**Si** p est labellisé **Alors**“Calcul de l’écart minimal $\Delta = \min_y \Delta(y)$ sur C et mise à jour du flot” $\Delta = \Delta(p);$ $y = p;$ **Tant que** $y \neq s$ **Faire** $x =$ la première composante x du label $l(y);$ **Si** le signe de $l(y)$ est $+$ **Alors** $f(a) = f(a) + \Delta;$ **Sinon** $f(a) = f(a) - \Delta;$ **Fin Si** $y = x;$ **Fin Tant**

“Réinitialisation”

Supprimer tous les labels sauf celui de $s;$ **Pour Tout** $x, x \in V$ **Faire** $l(x) = \text{vide};$ (Initialisation du label)**Fin Pour** $l(s) = (+, \infty);$ (labellisation de s)**Pour Tout** $x, x \in V$ **Faire** $u(x) = \text{faux};$ (réinitialisation du marquage des sommets) $\Delta(x) = \infty;$ **Fin Pour****Fin Si****Jusqu’à** $u(x) == \text{vrai}$ pour tout sommet qui a été labellisé;Soit X l’ensemble des sommets qui ont été labellisés; $\overline{X} = V \setminus X;$ **Fin**

À l’aide de la proposition 4.4.5 et du théorème 4.4.7 de FORD et FULKERSON, on peut vérifier que l’algorithme ci-dessus calcule une coupe de capacité minimum et un flot de valeur maximum. Une estimation grossière de la complexité nous donne : la boucle **tant que** est réalisée en $O(n^2m)$. La boucle **répéter** est réalisée en $O(nm)$. Si le réseau est dense (c’est-à-dire si $n^2 \in O(|\vec{E}|)$), la complexité de l’algorithme est en $O(n^5)$. Si le réseau est peu dense (c’est-à-dire si $|\vec{E}| \in O(n)$), la

complexité de l'algorithme est en $O(n^3)$.

Exercice 4.6. Expliciter ce que l'algorithme produit à partir du réseau de la figure 4.6.

4.5 Applications des flots dans un réseau

Nous allons maintenant donner quelques applications de la notion de flot, notamment à la connexité. Un ensemble A d'arcs d'un digraphe Γ est **arc-séparant** pour deux sommets s et p de Γ si tout chemin élémentaire de s à p passe par un arc de A . L'ensemble A est **arc-séparant minimum** s'il est de cardinal minimum : pour tout ensemble arc-séparant A' , on a $|A| \leq |A'|$. Deux chemins sont **arc-disjoints** s'ils n'ont aucun arc en commun.

De même un ensemble A d'arêtes d'un graphe Γ est **arête-séparant** pour deux sommets s et p de Γ , si toute chaîne élémentaire entre s et p emprunte une arête de A . L'ensemble A est **arête-séparant minimum** si pour tout ensemble arête-séparant A' , on a $|A| \leq |A'|$.

Lorsque la capacité d'un digraphe $\Gamma = (V; \vec{E}, c)$ satisfait $c(a) = 1$ pour tout $a \in \vec{E}$, la capacité d'une coupe $(X, \overline{X})$ de Γ coïncide avec le nombre d'arcs issus de X et se terminant dans $\overline{X}$. On parlera donc plutôt du **cardinal** de la coupe $(X, \overline{X})$. Nous nous intéressons dans le lemme suivant à ce type de digraphe.

Lemme 4.5.1. *Soit $\Gamma = (V; \vec{E}, c)$ un digraphe muni d'une capacité c telle que pour tout $a \in \vec{E}$, $c(a) = 1$ et soient s et p deux sommets de Γ . Supposons qu'il existe au moins un chemin entre s et p . Alors le cardinal d'une coupe minimum pour les sommets s et p (c'est-à-dire $s \in X$, $p \in \overline{X}$ et $V = X \sqcup \overline{X}$) est égal au cardinal d'un ensemble arc-séparant minimum entre s et p .*

Démonstration. Soit α le cardinal minimum pour un ensemble arc-séparant pour s et p , et soit β le cardinal d'une coupe minimum pour s et p .

- $\alpha \leq \beta$. Soit $(X, \overline{X})$ une coupe pour s et p de cardinal β . L'ensemble $A = \{a \in \vec{E} : i(a) \in X, t(a) \in \overline{X}\}$ est clairement un ensemble arc-séparant de cardinal $c(X, \overline{X})$ et, par suite, $\beta = c(X, \overline{X}) = |A| \geq \alpha$.
- $\beta \leq \alpha$. Soit A un ensemble arc-séparant pour s et p de cardinal α . On note X l'ensemble des sommets joignables à partir de s (s

compris) et évitant A . Puisque A est arc-séparant pour s et p , on a $p \notin X$, donc $(X, \overline{X})$ est une coupe pour s et p . Si $a \in \overrightarrow{E}$ vérifie $i(a) \in X$ et $t(a) \in \overline{X}$, on note γ le chemin de s à $i(a)$ évitant A . Si $a \notin A$, la concaténation de γ et de a fournirait un chemin de s vers $t(a)$ évitant A , c'est-à-dire $t(a) \in X$, contradiction. Donc $a \in A$. Il en résulte que la coupe $(X, \overline{X})$ ainsi construite vérifie $c(X, \overline{X}) \leq |A| = \alpha$. D'où $\beta \leq \alpha$. $\square$

Exercice 4.7. Soit Γ comme dans l'énoncé du lemme 4.5.1. Déterminer une bijection entre les ensembles arc-séparants minimums et les coupes de cardinal minimum.

Nous sommes maintenant en mesure de donner une version en terme de cardinal minimal d'ensembles arc-séparants (respectivement arête-séparants) du théorème de Menger. Rappelons que les (di)graphes considérés sont supposés sans boucle. On dit que deux chaînes sont arête-disjointes si elles n'ont aucune arête commune.

Théorème 4.5.2 (Menger, versions arc et arête).

- i) Soit $\Gamma = (V; \overrightarrow{E})$ un digraphe simple et s, p deux sommets non adjacents de Γ . Alors le nombre maximum de chemins élémentaires arc-disjoints entre s et p est égal au cardinal d'un ensemble arc-séparant minimum pour s et p .
- ii) Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe simple et s, p deux sommets non adjacents de Γ . Alors le nombre maximum de chaînes élémentaires arête-disjointes entre s et p est égal au cardinal d'un ensemble arête-séparant minimum pour s et p .

Démonstration.

i) S'il n'existe aucun chemin entre s et p , le résultat est immédiat. Sinon, on définit une capacité c en posant $c(a) = 1$ pour tout $a \in \overrightarrow{E}$. $(V; \overrightarrow{E}, s, p, c)$ n'est pas forcément un réseau, car s et p ne sont pas nécessairement une source et un puits, mais il suffit d'ajouter, si nécessaire, deux sommets s_0 et p_0 ainsi que deux arcs reliant respectivement s_0 à s et p à p_0 pour obtenir réellement un réseau (voir remarque 4.4.4). Soit k le nombre maximum de chemins élémentaires arc-disjoints entre s et p , chemins que l'on désigne par $C_1, \dots, C_k$ et, soit l le cardinal minimum d'un ensemble arc-séparant pour s et p .

$\alpha)$ Montrons que $l \geq k$. Construisons un flot f entre s et p de la manière suivante :

$$f(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \text{ est un arc de l'un des } C_i, i = 1, \dots, k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrons que c'est bien un flot : d'une part la contrainte de capacité est trivialement vérifiée ; d'autre part, pour $x \neq s, p$, la somme $\sum_{a \in \vec{E} : t(a)=x} f(a)$ est exactement le nombre d'arcs dans les C_i arrivant en x . Comme les C_i sont arc-disjoints, ce nombre est celui des arcs appartenant aux divers C_i et partant de x , à savoir la somme $\sum_{a \in \vec{E} : i(a)=x} f(a)$. La conservation du flot est donc bien satisfaite. On a $\omega(f) = \sum_{i(a)=s} f(a)$, qui dénombre les arcs a dans les C_i et d'origine s , donc facilement $\omega(f) = k$, les C_i étant arc-disjoints. Soit $(X, \overline{X})$ une coupe minimum du réseau. Alors $c(X, \overline{X}) \geq \omega(f) = k$. D'où, par le lemme 4.5.1, $l \geq k$.

$\beta)$ Réciproquement, soit A un ensemble arc-séparant minimum (pour s et p) et $a \in A$. Puisque $A \setminus \{a\}$ n'est pas arc-séparant, il existe un chemin élémentaire C de s à p , empruntant a ; soit Γ' le graphe obtenu en retirant à Γ les arcs de C . L'ensemble $A \setminus \{a\}$ est arc-séparant minimum, dans Γ' , pour s et p . En itérant $l-1$ fois encore ce raisonnement, on met en évidence l chemins arc-disjoints. Ainsi $l \leq k$.

ii) Le cas des graphes se ramène au cas des digraphes de la manière suivante : on remplace toutes les arêtes du graphe Γ par deux arcs de directions opposées. On obtient ainsi un digraphe noté $\vec{\Gamma}$. Un système de chaînes élémentaires arête-disjointes entre s et p induit un système de chemins élémentaires arc-disjoints entre s et p . De manière réciproque, à tout système de chemins élémentaires arc-disjoints entre s et p dans $\vec{\Gamma}$ correspond un système de chaînes élémentaires arête-disjointes entre s et p dans Γ . Soit k le nombre maximal de chaînes élémentaires arête-disjointes entre s et p dans Γ . Alors k est également le nombre maximum de chemins élémentaires arc-disjoints entre s et p . Il existe donc un ensemble arc-séparant A dans $\vec{\Gamma}$ de cardinal égal à k . Cet ensemble A est également un ensemble arête-séparant dans Γ . Cela prouve notre assertion. $\square$

Nous allons utiliser les résultats ci-dessus pour démontrer le théorème de MENGER. Historiquement, c'est sous cette forme qu'il a été démontré en premier.

Théorème 4.5.3 (Menger, version sommet, 1927). *Soit Γ un digraphe (respectivement un graphe). Soient s et p deux sommets non adjacents de Γ . Alors le nombre maximum de chemins (respectivement de chaînes) élémentaires sommet-disjoints entre s et p est égal au cardinal d'un ensemble sommet-séparant minimum pour s et p .*

Démonstration. Nous démontrons le résultat dans le cas d'un digraphe. Le cas d'un graphe Γ en découle facilement en appliquant le résultat à un digraphe dont le graphe sous-jacent est Γ .

Soit $\Gamma = (V; \vec{E})$ un digraphe. Nous allons transformer ce digraphe afin de pouvoir utiliser le théorème 4.5.2.

Définissons un digraphe Γ' de la manière suivante :

- **les sommets de Γ' sont :** s, p et tout sommet $x \neq s, p$ de Γ est dédoublé en deux sommets x' et x'' ;
- **les arcs de Γ' sont :** tout arc de s à x dans Γ est remplacé par un arc de s à x' dans Γ' . Tout arc de x à p dans Γ est remplacé par un arc de x'' à p dans Γ' . Tout arc de x à y dans Γ avec $x, y \neq s, p$ est remplacé par un arc de x'' à y' . Enfin entre chaque paire de nouveaux sommets x' et x'' , on rajoute un arc.

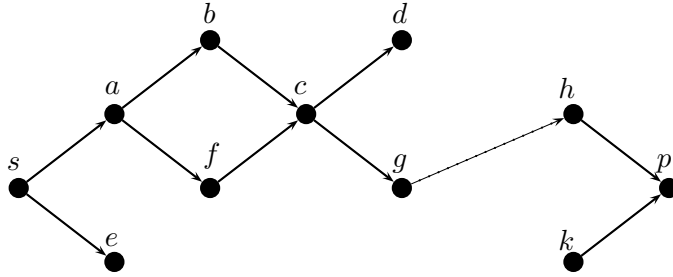
Une illustration de cette transformation est donnée en figure 4.7.

Il est clair que des chemins élémentaires sommet-disjoints de Γ deviennent des chemins élémentaires arc-disjoints de Γ' . Réciproquement, deux chemins élémentaires non sommet-disjoints de Γ induisent deux chemins élémentaires de Γ' qui ne sont pas arc-disjoints. Par conséquent, d'après le théorème 4.5.2, le nombre maximum de chemins élémentaires sommet-disjoints entre s et p dans Γ est égal au cardinal d'un ensemble arc-séparant minimum A entre s et p dans Γ' . En remplaçant chaque arc de A de x'' vers y' par un arc de x' vers x'' , on obtient un ensemble A' qui reste arc-séparant entre s et p et de même cardinal que A par minimalité. Ainsi on peut se restreindre aux ensembles arc-séparants minimums A' de Γ' ne contenant que des arcs de la forme (x', x'') . Ceux-ci correspondent naturellement aux ensembles sommet-séparants de Γ en identifiant les arcs de x' à x'' aux sommets x dont ils proviennent. $\square$

Exercice 4.8. Prouver une version arête du théorème 4.5.3

Nous finissons ce paragraphe par le résultat suivant, qui est dû à H. WHITNEY.

Théorème 4.5.4 (WHITNEY, 1932). *Un graphe Γ est k -sommet-connexé si et seulement si toute paire de sommets est reliée par au moins k chaînes sommet-disjointes.*



est transformé en

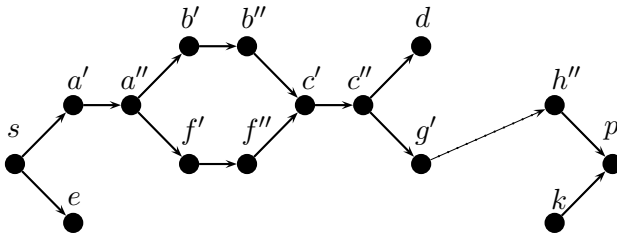


Figure 4.7 – Transformation d'un graphe par insertion de sommets. Les chemins $abcd$ et $afcg \dots h$ ont un sommet commun c dans Γ . Ils deviennent $a'a''b'b''c'c''d$ et $a'a''f'f''c'c''g' \dots h''$ dans Γ' et ont une arête commune $c'c''$.

Démonstration. Si toute paire de sommets est reliée par au moins k chaînes sommet-disjointes alors Γ est clairement k -sommet-connexe.

Supposons maintenant qu'il existe deux sommets s et p reliés par au plus $k - 1$ chaînes sommet-disjointes. Si s et p ne sont pas adjacents, par le théorème 4.5.3 il existe un ensemble sommet-séparant pour s et p de cardinal inférieur ou égal à $k - 1$. Donc Γ n'est pas k -sommet-connexe. Supposons que s et p soient adjacents. On considère alors le graphe Γ' déduit de Γ en ajoutant au milieu de l'arête de s à p un sommet attractif z dans le sens qu'il est adjacent à tout sommet de Γ . Dans Γ' , il y a toujours au plus $k - 1$ chaînes sommet-disjointes entre les deux sommets s et p . Comme s et p ne sont pas adjacents dans Γ' , le théorème 4.5.3 appliqué à Γ' montre l'existence d'un ensemble sommet-séparant entre s et p de cardinal inférieur ou égal à $k - 1$. Donc Γ' n'est pas k -sommet-connexe. Il est alors clair que Γ ne l'est pas non plus. $\square$

4.6 Compléments : lois de KIRCHHOFF

Ces lois, qui complètent la loi d'OHM (1827), datent de 1845. Elles concernent la circulation de l'énergie dans un circuit électrique :

- 1^{re} loi $[K_1]$: la chute de potentiel dans un circuit fermé est nulle ;
- 2^e loi $[K_2]$: la somme algébrique des courants qui entrent dans un nœud d'un circuit fermé est nulle.

Ces deux lois permettent de calculer les courants et les potentiels dans n'importe quel réseau électrique.

Exemple 4.6.1. Dans la figure 4.8, on a :

$[K_2]$: $I_1 = I_2 + I_3$ (courants en O).

$[K_1]$: $z_1 I_2 - \mathcal{E} = 0$ (carré $\mathcal{C}$) d'où $\frac{1}{z_1} = \frac{I_2}{\mathcal{E}}$.

$[K_1]$: $z_2 I_3 - \mathcal{E} = 0$ d'où $\frac{1}{z_2} = \frac{I_3}{\mathcal{E}}$.

Si on cherche à remplacer ce circuit par une seule impédance z avec la même intensité I_1 au générateur [circuit équivalent], on doit avoir $\frac{1}{z} = \frac{I_1}{\mathcal{E}}$ d'après K_1 , puis

$$\frac{1}{z} = \frac{I_1}{\mathcal{E}} = \frac{I_2 + I_3}{\mathcal{E}} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2}$$

on retrouve le résultat classique $z = \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2}$.

On pourrait de même montrer, grâce aux lois de KIRCHHOFF, que 2 impédances en série sont équivalentes à leur somme.

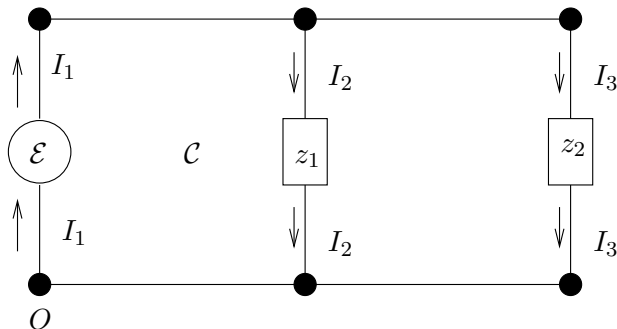


Figure 4.8 – Circuit avec 2 impédances en parallèle.

Exemple 4.6.2. Le circuit de la figure 4.9 peut se résoudre petit à petit en utilisant les circuits équivalents. Cela n'est pas toujours possible comme on le voit sur le circuit de la figure 4.10.

Exemple 4.6.3. Concernant la figure 4.10, on a les équations :

$$[K_1] : \mathcal{E}_1 = z_2 I_2 - z_1 I_1.$$

$$[K_1] : \mathcal{E}_2 = z_3 I_3 - z_2 I_2.$$

$$[K_2] : I_1 + I_2 + I_3 = 0.$$

L'interprétation de $[K_2]$ en combinatoire est simple : le circuit électrique est représenté par un graphe orienté ; les intensités forment alors un flot dans le graphe (cela revient à prendre un réseau de capacité infinie).

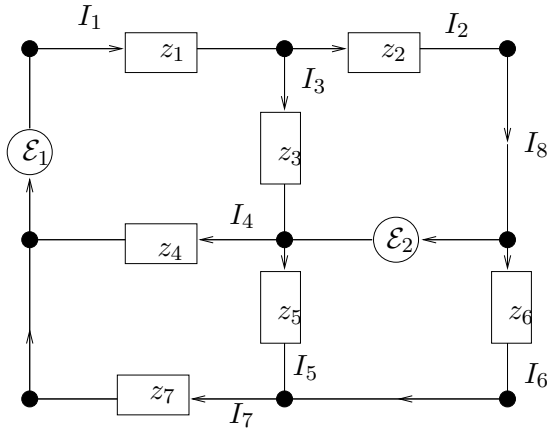


Figure 4.9 – Représentation d'un circuit électrique.

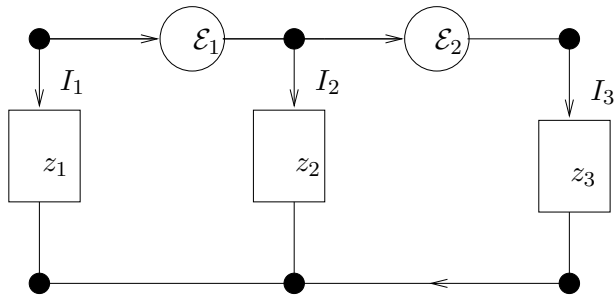
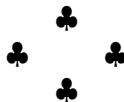


Figure 4.10 – Représentation d'un circuit électrique.



Chapitre 5

Graphes planaires

Dans ce chapitre nous étudions un aspect topologique des graphes. Nous allons voir si un graphe Γ peut être représenté (ou dessiné) sur un plan ou sur une autre surface. La notion classique de représentation d'un graphe sur une surface S répond aux exigences suivantes :

- les sommets sont représentés par des points de S , appelés encore sommets ;
- les arêtes sont représentées par des courbes simples (sans point double) de la surface S entre ces points, de telle sorte que deux courbes ne peuvent se couper qu'en des sommets sur S .

Une telle opération est aussi appelée plongement de Γ dans S . Cette vision des graphes est très importante en électronique, notamment pour la conception des circuits intégrés. On s'intéressera spécialement au cas où S est le plan euclidien $\mathbb{R}^2$.

Bien que l'on puisse définir des graphes planaires orientés, nous ne traiterons dans ce chapitre que des graphes non orientés. Les notions utilisées ici se situent à la frontière de la topologie, de la topologie algébrique et de la géométrie ; elles sont souvent difficiles à définir rigoureusement ; on trouvera au paragraphe 5.7 de ce chapitre quelques compléments utiles.

5.1 Dessins

L'espace euclidien $\mathbb{R}^k$, $k \geq 1$, est muni de la norme usuelle

$$\|(x_1, \dots, x_k)\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_k^2}.$$

Soient T un sous-espace topologique (voir définition au paragraphe 5.7) de $\mathbb{R}^k$ et $x, y \in T$; un **arc géométrique** de x à y est une application

continue injective

$$\xi : [0, 1] \longrightarrow T$$

vérifiant $\xi(0) = x$ et $\xi(1) = y$.

Une **courbe simple** γ entre x et y est l'image d'un arc de x à y ou de y à x : $\gamma = \text{Im}(\xi) = \xi([0, 1]) \subseteq T$. Nous noterons $\mathcal{C}_T$ l'ensemble des courbes simples de T .

Un **dessin** F d'un graphe $\Gamma = (V; E, N)$ sur T est une application injective

$$\sigma : V \sqcup E \longrightarrow T \sqcup \mathcal{C}_T$$

telle que la restriction $\sigma|_V$ (respectivement $\sigma|_E$) de σ à V (respectivement E) soit une application injective de V (respectivement E) dans T (respectivement $\mathcal{C}_T$).

Il est donc entendu que si e et e' ont les mêmes extrémités (cas des multi-arêtes), on a $\sigma(e) \neq \sigma(e')$; néanmoins les courbes peuvent éventuellement se couper en d'autres points que leurs extrémités.

Par abus de langage, l'ensemble $F = \sigma(V) \cup \bigcup_{e \in E} \sigma(e)$ est encore appelé dessin de Γ sur T ; les courbes $\sigma(e)$, $e \in E$, sont aussi appelées arêtes et les points $\sigma(v)$, $v \in V$, sommets du dessin F .

Exemple 5.1.1. Les espaces T dans lesquels on « dessine » sont généralement $T = \mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$, mais aussi $T = \{x \in \mathbb{R}^3, \|x - s\| = r\}$, la sphère de centre s et de rayon r dans $\mathbb{R}^3$; on pourra aussi considérer la question du dessin d'un graphe sur le tore, à savoir la surface d'une chambre à air dans $\mathbb{R}^3$.

La plupart des figures de ce livre présentent des représentations de graphes sur $T = \mathbb{R}^2$.

Si les courbes ne se coupent qu'aux sommets, on dira que le dessin est un **plongement** de Γ dans T .

Proposition 5.1.2. *Tout graphe d'ordre fini $\Gamma = (V; E, N)$ admet un plongement dans $\mathbb{R}^3$.*

Démonstration. Soit D une droite de $\mathbb{R}^3$; fixons $|V|$ points distincts sur cette droite : $x_v, v \in V$ et prenons $|E|$ demi-plans distincts P_e , $e \in E$, dont la frontière est la droite D (comme une ailette de flèche). Pour chaque arête $e \in E$ d'extrémités v, w on dessine une courbe simple γ_e dans le demi-plan P_e entre x_v et x_w (par exemple un arc de cercle, ou un cercle si e est une boucle). Alors $F = \{x_v, v \in V\} \cup \bigcup_{e \in E} \gamma_e([0, 1])$ est un dessin de Γ dans $\mathbb{R}^3$ qui correspond à un plongement de Γ . $\square$

On notera que cette construction s'adapte au cas infini, pourvu que V et E aient au plus la puissance du continu (c'est-à-dire il existe une injection de $V \sqcup E$ dans $\mathbb{R}$).

Exemple 5.1.3. Une chaîne élémentaire non fermée admet un plongement dans $\mathbb{R}$; un cycle élémentaire $C_n, n \geq 3$, admet un plongement dans $\mathbb{R}^2$, mais pas dans $\mathbb{R}$; c'est aussi le cas pour $K_{1,n}, K_{2,n}, n \geq 3$; les graphes complets K_3 et K_4 se plongent dans $\mathbb{R}^2$; K_5 et $K_{3,3}$ peuvent être dessinés sur le plan, comme tout graphe d'ordre fini, mais ne peuvent y être plongés : ceci est une question plus difficile, que nous étudierons plus loin (voir figure 5.1).

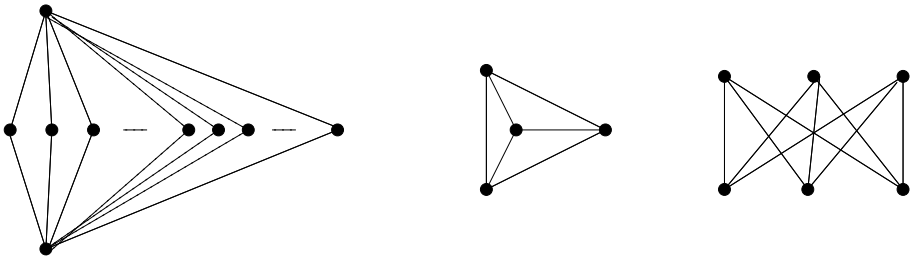


Figure 5.1 – Plongements de $K_{2,n}, K_4$ et dessin de $K_{3,3}$ dans $\mathbb{R}^2$.

Quels sont donc les graphes qui admettent un plongement dans le plan ? Cette question fait l'objet du paragraphe suivant.

5.2 Graphes planaires

On dit qu'un graphe d'ordre fini est **planair**e s'il admet un plongement dans le plan $\mathbb{R}^2$. C'est par exemple le cas pour $K_{2,n}, K_3$ et K_4 .

5.2.1 Rappels de topologie de $\mathbb{R}^n$

Pour les détails et les preuves, se reporter à la section 5.7. Soit A un sous-espace topologique de $\mathbb{R}^n$:

- on dit que A est connexe s'il n'existe pas de partition non triviale de A en deux ouverts ($A = U \sqcup V$ et U, V ouverts de A tels que $U \cap V = \emptyset$ implique $U = \emptyset$ ou $V = \emptyset$) ;
- pour $x \in A$ on note $C(x)$ la composante connexe de x , c'est-à-dire le plus grand (au sens de l'inclusion) sous-espace connexe de A

contenant x ; on a alors la décomposition connexe de A

$$A = \bigsqcup_{x \in \tilde{A}} C(x),$$

où $\tilde{A}$ est un ensemble de représentants des classes d'équivalence dans la relation $x \sim y$ si et seulement si $y \in C(x)$;

- si A est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, ses composantes connexes sont des ouverts (car $\mathbb{R}^n$ est localement connexe);
- si A et B sont connexes et $A \cap B \neq \emptyset$, alors $A \cup B$ est connexe;
- les sous-espaces connexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles (fermés ou non, bornés ou non) de $\mathbb{R}$;
- si $f : A \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est continue et si A est connexe, alors $f(A)$ est connexe (théorème de BOLZANO).

5.2.2 Lignes polygonales

Pour $x, y \in \mathbb{R}^k$, $x \neq y$, le **segment** (fermé) d'extrémités x et y est le sous-ensemble :

$$[[x, y]] = \{(1-t)x + ty, 0 \leq t \leq 1\}.$$

On définit de façon analogue les sous-ensembles $[[x, y[$, $]x, y]]$ et $]x, y[$; le segment $[[x, y]]$ est homéomorphe à l'intervalle fermé $[0, 1]$ de $\mathbb{R}$, *via* le paramétrage

$$\gamma : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^k \\ t & \longmapsto & (1-t)x + ty. \end{cases}$$

C'est donc, d'après le théorème de BOLZANO, un sous-espace connexe de $\mathbb{R}^k$.

Une **ligne polygonale** est l'union d'un nombre fini de segments mis « bout à bout » et qui ne se recoupent pas :

$$P = [[x_0, x_1]] \cup [[x_2, x_3]] \cup \dots \cup [[x_n, x_n]], \quad (n \geq 2);$$

c'est donc une courbe simple particulière : il suffit de définir $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ par $\gamma(t) = (1-t)x_i + tx_{i+1}$, si $\frac{i}{n} \leq t \leq \frac{i+1}{n}$, $0 \leq i \leq n-1$; x_0 et x_n sont les extrémités de P , les autres x_i , $i = 1, \dots, n-1$, étant appelés points anguleux de P ; P est **fermée** si $x_0 = x_n$; nous noterons $\overset{\circ}{P} = \gamma([0, 1]) = P \setminus \{x_0, x_n\}$, appelé **intérieur** de P ; c'est une expression un peu dangereuse car ce n'est pas un ouvert du plan, mais cela fait référence à l'intérieur $]a, b[$ d'un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.

Lemme 5.2.1. *Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{R}^2$, alors pour tout couple de points de U , il existe une ligne polygonale dans U joignant ces deux points.*

Démonstration. La preuve est merveilleusement simple et typique des raisonnements avec les connexes : on choisit $x \in U$ et on définit X comme étant l'ensemble des $z \in U$ pour lesquels il existe une ligne polygonale (éventuellement réduite à $\{x\}$) entre x et z dans U .

- X n'est pas vide car $x \in X$;
- X est ouvert ; en effet soit $z \in X$; comme U est ouvert, il existe un disque $D(z, r)$ ouvert inclus dans U ; alors $D(z, r) \subset X$ puisque tout $w \in D(z, r)$ est joint à z par le segment $[[w, z]] \subset U$ et z est joint à x par une ligne polygonale, donc w est bien joint à x par une ligne polygonale ;
- $U \setminus X$ est ouvert pour presque la même raison ! En effet si $z \in U \setminus X$, il existe $r > 0$ tel que $D(z, r) \subset U$; alors $D(z, r) \subset U \setminus X$, car si par hasard un point w de ce disque était dans X , il serait joint à x par une ligne polygonale, qu'on complèterait en lui ajoutant le segment $[[w, z]]$ en une ligne entre z et x : z serait donc dans X , ce qui n'est pas le cas ;
- comme U est connexe et qu'on a une partition de U en deux ouverts X et $U \setminus X$, cette partition est triviale, ce qui impose $X = U$; et cela veut dire que tout $z \in U$ est joint à x par une ligne polygonale ; il s'ensuit que deux points quelconques de U peuvent aussi être joints par une ligne polygonale. $\square$

Proposition 5.2.2. *Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe planaire. Alors Γ admet un plongement dont toutes les arêtes sont des lignes polygonales.*

Démonstration. Soit $\sigma : V \sqcup E \longrightarrow \mathbb{R}^2 \sqcup \mathcal{C}_{\mathbb{R}^2}$ un plongement de Γ dans $\mathbb{R}^2$, associé au dessin F . On va construire un plongement de Γ ayant les mêmes sommets, mais dont les arêtes vont être une à une remplacées par des lignes polygonales.

On commence par effacer toutes les boucles. On définit ensuite

$$\delta = \frac{\min\{\|\sigma(v) - \sigma(w)\| : v, w \in V, v \neq w\}}{2}.$$

Soit e une arête d'extrémités $v, w, v \neq w$, associée à l'arc géométrique $\xi_e : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 : \xi(0) = v, \xi(1) = w$. Il s'agit de « rectifier » ξ_e en une ligne polygonale ne rencontrant aucune autre arête. Pour cela δ permet de s'éloigner des points de confluence que sont les sommets ; on utilisera alors le lemme 5.2.1. Soit v_e le point où l'arc ξ_e quitte le disque $\overline{D}(\sigma(v), \delta) : v_e = \xi_e(s)$ avec $s = \sup\{t, 0 \leq t \leq 1 : \xi_e(t) \in \overline{D}(\sigma(v), \delta)\}$

et soit w_e le point où ξ_e entre dans $\overline{D}(\sigma(w), \delta) : w_e = \xi_e(s)$ avec $s = \inf\{t, 0 \leq t \leq 1 : \xi_e(t) \in \overline{D}(\sigma(w), \delta)\}$.

On définit l'ouvert

$$\Omega_e = \mathbb{R}^2 \setminus \left(\bigcup_{f \neq e} \sigma(f) \cup \bigcup_{x \in V \setminus \{v, w\}} \overline{D}(\sigma(x), \delta/2) \right).$$

Les composantes connexes de Ω_e sont ouvertes (car $\mathbb{R}^2$ est localement connexe) et v_e, w_e sont dans une même composante connexe U_e de Ω_e (car la portion d'arc de ξ_e allant de v_e à w_e est un connexe de Ω_e).

Par le lemme 5.2.1, il y a une ligne polygonale P_e dans U_e joignant v_e à w_e . Désignons par $\tilde{v}_e$ le point en lequel P_e quitte $\overline{D}(\sigma(v), \delta)$ et $\tilde{w}_e$ le point en lequel P_e entre dans $\overline{D}(\sigma(w), \delta)$. Soit enfin $\tilde{P}_e$ la portion d'arc correspondante entre ces deux points.

La réunion $\theta_e = [[\sigma(v), \tilde{v}_e]] \cup \tilde{P}_e \cup [[\tilde{w}_e, \sigma(w)]]$ est une ligne polygonale reliant $\sigma(v)$ à $\sigma(w)$, ne rencontrant aucune autre arête.

On recommence cette construction avec toutes les arêtes de Γ (non boucles). Il est ensuite très facile d'ajouter des boucles : une boucle de sommet v peut être réalisée par un petit triangle de sommet $\sigma(v)$ (voir figure 5.4). □

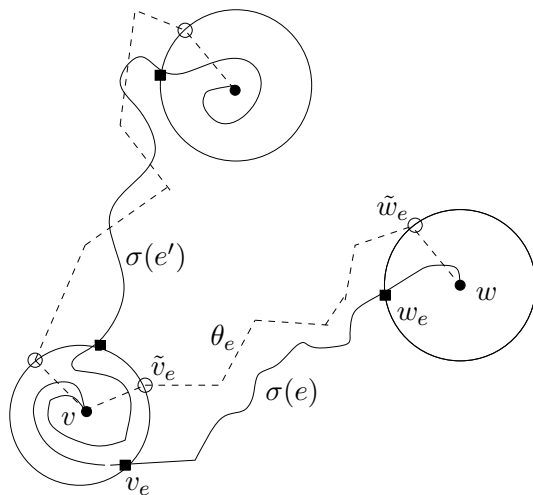


Figure 5.2 – Illustration de la preuve de la proposition 5.2.2 (on a écrit v et w au lieu de $\sigma(v)$ et $\sigma(w)$).

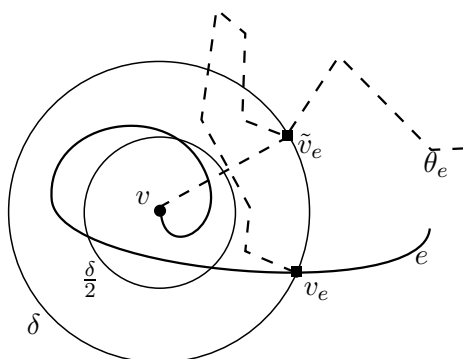
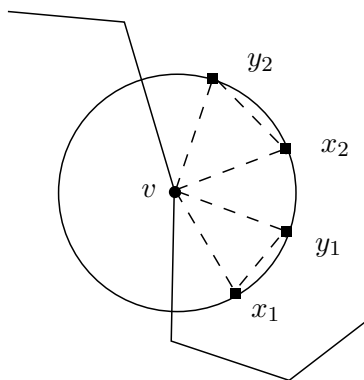
Figure 5.3 – Vue rapprochée au voisinage de $\sigma(v)$ (noté v).

Figure 5.4 – Création d'une 2-boucle.

Pour éviter les problèmes délicats que peuvent poser les courbes, nous supposons que les représentations sont réalisées avec des lignes polygonales : d'après la proposition 5.2.2 c'est toujours possible. Néanmoins, par souci esthétique et surtout pour éviter les confusions entre sommets et points anguleux sur les lignes polygonales, les figures sont réalisées ici avec des lignes... courbes !

Le **graphe simplifié** Γ_s de $\Gamma = (V; E, N)$ est le graphe simple obtenu en supprimant dans Γ les boucles et en remplaçant chaque p -arête par une arête simple.

Proposition 5.2.3. *Soit Γ un graphe d'ordre fini. Alors Γ est planaire si et seulement si son simplifié Γ_s est planaire.*

Démonstration. Le sens direct est évident. Supposons $\Gamma_s = (V; E, N)$ planaire, avec le plongement par arcs polygonaux

$$\sigma : V \sqcup E \longrightarrow \mathbb{R}^2 \sqcup \mathcal{C}_{\mathbb{R}^2}.$$

On définit $\delta > 0$ de la façon suivante : pour chaque sommet v , il existe un nombre réel $r_v > 0$ assez petit de sorte que le disque $\overline{D}(\sigma(v), r_v)$ ne rencontre les arêtes e adjacentes à $\sigma(v)$ qu'en leur premier segment et ne rencontre aucune autre arête. On pose $\delta = \min\{r_v : v \in V\}$.

– Doublement d'une arête.

Soit $e = \{v, w\} \in E$. On considère l'ouvert Ω_e et les points v_e et w_e introduits dans la preuve de la proposition 5.2.2 (Γ_s n'a pas de boucle).

La portion P_e de la ligne polygonale $\sigma(e)$ entre v_e et w_e est une partie connexe de Ω_e , donc est contenue dans une composante connexe U_e de Ω_e : l'ouvert U_e est « expurgé » des $\sigma(f)$, $f \in E$, $f \neq e$.

En chaque $z \in P_e$, il existe $r_z > 0$ tel que $D_z = D(z, r_z)$ soit inclus dans U_e ; alors $\mathcal{U} = \{D_z \cap P_e : z \in P_e\}$ est un recouvrement ouvert de P_e auquel on applique le lemme 5.7.5 ; il existe donc une chaîne simple finie d'éléments de $\mathcal{U}$ joignant v_e à w_e : $U_i = D_{z_i} \cap P_e$, $i = 1, \dots, m$; v_e est dans U_1 et dans aucun autre U_i ; w_e est dans U_m et dans aucun autre U_i ; $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ si et seulement si $|i - j| \leq 1$; comme P_e peut zigzaguer à l'intérieur des D_{z_i} , on le remplace par la ligne des centres : $\tilde{P}_e = [[v_e, z_1]] \cup [[z_1, z_2]] \cup \dots \cup [[z_{m-1}, z_m]] \cup [[z_m, w_e]]$, que l'on complète en une ligne polygonale P_e^* de $\sigma(v)$ à $\sigma(w)$ par les deux rayons $[[\sigma(v), \sigma(v_e)]]$ et $[[\sigma(w)_e, \sigma(w)]]$. On voit alors qu'il est possible de doubler cette ligne en prenant $v'_e \in D_{z_1} \cap \mathcal{C}(\sigma(v), \delta)$ et $w'_e \in D_{z_m} \cap \mathcal{C}(\sigma(w), \delta)$ et en « suivant » P_e^* de chaque « lentille » biconvexe $D_{z_i} \cap D_{z_{i+1}}$ à la suivante (voir figure 5.5).

– Création d'une n -boucle en $\sigma(v)$.

Après multiplication des arêtes (étape précédente), le cercle $\mathcal{C}(\sigma(v), \delta)$ possède un nombre fini de points distincts v'_e , où e décrit l'ensemble des arêtes ayant v pour extrémité ; on se donne un arc A de ce cercle $\mathcal{C}(\sigma(v), \delta)$ entre deux de ces points, puis on fixe arbitrairement $2n$ points sur cet arc rangés selon une orientation du cercle fixée : $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$; on forme alors les n boucles $[[\sigma(v), x_i]] \cup [[x_i, y_i]] \cup [[y_i, \sigma(v)]]$, $1 \leq i \leq n$ (voir figure 5.4). $\square$

Parmi les résultats qui suivent certains peuvent paraître évidents ; on verra pourtant que certaines preuves s'avèrent très difficiles ! C'est notamment le cas du célèbre théorème de JORDAN qui affirme qu'une

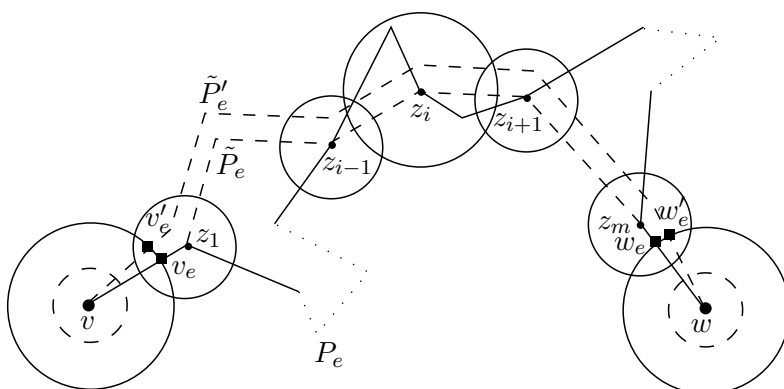


Figure 5.5 – Doublement d'une arête P_e en $\tilde{P}_e$ et $\tilde{P}'_e$.

courbe simple fermée partage le plan en deux composantes connexes¹. Nous aurons besoin d'une version « polygonale » de ce résultat, le théorème 5.2.4 qui suit, et d'un autre résultat un peu technique, la proposition 5.2.5, qui exprime intuitivement qu'une ligne polygonale non fermée ne partage pas un ouvert connexe, alors qu'une ligne fermée le coupe en deux.

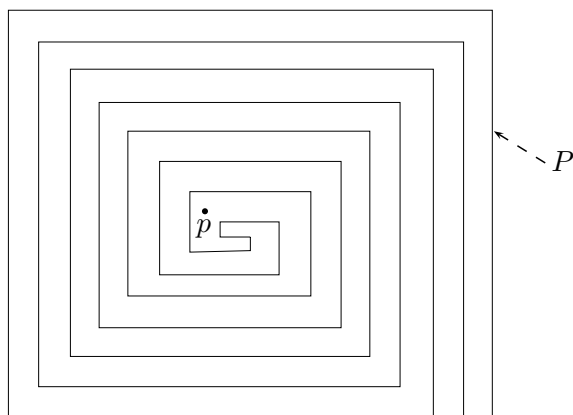


Figure 5.6 – Une ligne polygonale P et un point p . Le point p est-il à l'intérieur (composante connexe bornée de $\mathbb{R}^2 \setminus P$) ou à l'extérieur (composante connexe bornée) de la ligne polygonale fermée P ?

1. On en trouve une démonstration complète dans C.T.C. WALL. *A Geometric Introduction to Topology*, Dover, 1972.

Théorème 5.2.4 (JORDAN). *Soit P une ligne polygonale du plan $\mathbb{R}^2$; si P est fermée alors l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus P$ a exactement 2 composantes connexes U_1, U_2 dont une seule est non bornée et $\text{Fr}(U_1) = \text{Fr}(U_2) = P$.*

Démonstration. Voir § 5.7. □

Nous commençons par énoncer certains résultats utiles pour la suite.

Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{R}^2$ dont la frontière $\text{Fr}(U)$ est constituée d'un nombre fini de lignes polygonales se rencontrant deux à deux en au plus un point ; soit P un segment (fermé) de $\text{Fr}(U)$ et $z \in P$:

α) si z est une extrémité de P , on prend ε assez petit pour que le disque $D(z, \varepsilon)$ ne rencontre que les segments de $\text{Fr}(U)$ passant par z ; alors $D(z, \varepsilon) \cap \text{Fr}(U)$ est constitué de rayons du cercle $\mathcal{C}(z, \varepsilon)$, définissant ainsi des secteurs angulaires ouverts « centrés » en z , dont chacun est inclus dans U ou dans $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{U}$: en effet ils sont connexes et ne contiennent pas de point de $\text{Fr}(U)$.

Lorsqu'il y a un seul rayon nous dirons que z est un **point terminal** de $\text{Fr}(U)$; dans ce cas l'unique secteur correspondant est inclus dans U (voir la figure 5.7 dans laquelle $\overline{U}^c$ désigne l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{U}$) ;

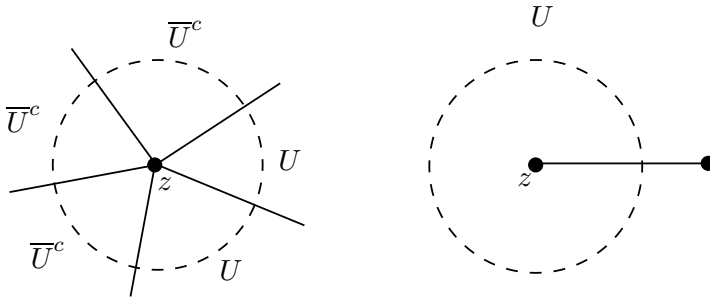
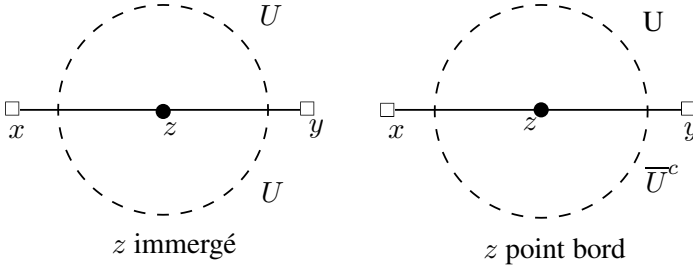


Figure 5.7 – Secteurs autour d'une extrémité et point terminal de $\text{Fr}(U)$.

β) si au contraire $z \in \overset{\circ}{P}$, $D(z, \varepsilon)$ coupe $\text{Fr}(U)$ selon un diamètre (toujours pour ε assez petit), d'où deux demi-disques dont l'un au moins est inclus dans U , car $z \in \overline{U}$:

- si l'autre demi-disque est aussi inclus dans U , on dit que z est **immergé** dans U (voir figure 5.8) ;
- sinon l'autre demi-disque est inclus dans $\mathbb{R}^2 \setminus U$, on dit alors que z est un **point bord** de U (voir figure 5.8).

Figure 5.8 – Point immergé et point bord de $\text{Fr}(U)$.

Proposition 5.2.5. *Soit U un ouvert connexe du plan dont la frontière est constituée d'arcs polygonaux et soient $x \in \text{Fr}(U)$, $y \in \overline{U}$ et P une ligne polygonale joignant x à y de sorte que $\overset{\circ}{P} \subset U$.*

- i) *Si $y \in U$ alors $U \setminus \overset{\circ}{P}$ est connexe.*
- ii) *Si x et y appartiennent à la même composante connexe de $\text{Fr}(U)$, alors $U \setminus \overset{\circ}{P}$ a deux composantes connexes et P est inclus dans la frontière de chacune de ces deux composantes connexes.*
- iii) *Si x et y sont dans deux composantes connexes différentes de $\text{Fr}(U)$, alors $U \setminus P$ est connexe.*

Démonstration.

i) On traite d'abord le cas $P = [[x, y]]$; pour $\varepsilon > 0$, on note

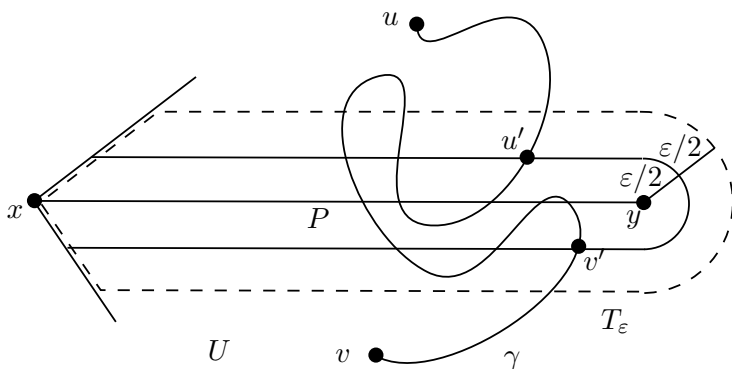
$$P_\varepsilon = \{z \in \mathbb{R}^2 : d(z, P) < \varepsilon\}.$$

P_ε est clairement un ouvert connexe. Lorsque ε est choisi assez petit, P_ε ne rencontre $\text{Fr}(U)$ que selon des rayons $[[x, x_i]]$ du disque $D(x, \varepsilon)$ de sorte que $T_\varepsilon = P_\varepsilon \cap U$ a la forme d'un tube tronqué (voir figure 5.9).

Soient $u, v \in U \setminus P$ et γ un arc joignant u à v dans U :

- si γ « évite » P , alors γ joint u à v dans $U \setminus P$;
- sinon on impose $\varepsilon < \min(d(u, P); d(v, P))$ de sorte que $u, v \notin \overline{T}_{\varepsilon/2}$ et ainsi γ entre dans $\overline{T}_{\varepsilon/2}$ en un point u' et en sort en un point v' : on a $u', v' \in T_\varepsilon \setminus P$ et $T_\varepsilon \setminus P$ est connexe (il est même étoilé), on peut donc joindre u' à v' dans $T_\varepsilon \setminus P$; par concaténation on obtient un arc de u à v dans $U \setminus P$.

Dans le cas général d'une ligne polygonale P , on raisonne par récurrence sur le nombre de segments constituant P .

Figure 5.9 – Tube tronqué par $\text{Fr}(U)$ autour d'un segment.

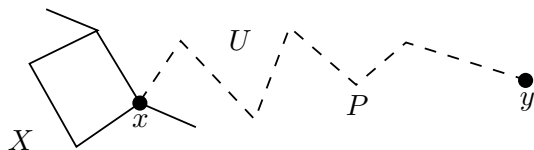
ii) La ligne polygonale entre x et y sur $\text{Fr}(U)$ permet de refermer l'arc P en un arc polygonal P' de $\mathbb{R}^2$. Par le théorème 5.2.4, on obtient deux composantes connexes U'_1, U'_2 pour $\mathbb{R}^2 \setminus P'$ et on a $P' = \text{Fr}(U_i)$, $i = 1, 2$. Alors en posant $U_i = U'_i \cap U$, $i = 1, 2$, on obtient exactement deux composantes connexes pour $U \setminus \overset{\circ}{P}$.

Soit $z \in \overset{\circ}{P}$. Si $z \notin \text{Fr}(U_2)$, alors il existe $r > 0$ tel que $D(z, r) \subset U$ et $D(z, r) \cap U_2 = \emptyset$. Donc $D(z, r) \cap U'_2 = \emptyset$: contradiction avec $z \in P' = \text{Fr}(U'_2)$. On a donc $\overset{\circ}{P} \subset \text{Fr}(U_2)$, puis de façon analogue $\overset{\circ}{P} \subset \text{Fr}(U_1)$. Comme les frontières $\text{Fr}(U_i)$, $i = 1, 2$, sont des fermés et $x, y \in P = \overset{\circ}{P}$, on conclut que $P \subset \text{Fr}(U_1) \cap \text{Fr}(U_2)$.

iii) Soient X et Y les composantes connexes de $\text{Fr}(U)$ contenant respectivement x et y : $X \cup Y \subset \text{Fr}(U)$, $X \cap Y = \emptyset$, $x \in X$, $y \in Y$.

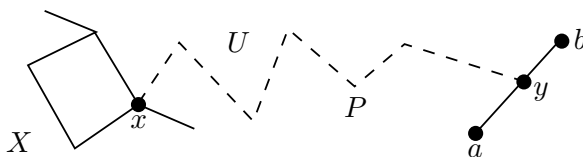
On raisonne par récurrence sur le nombre m de segments constituant Y :

α) pour $m = 0$, on a $Y = \{y\}$; $U' = U \cup \{u\}$ est « visiblement » ouvert et connexe ; on lui applique le i) : $U' \setminus P = U \setminus P$ est connexe ;



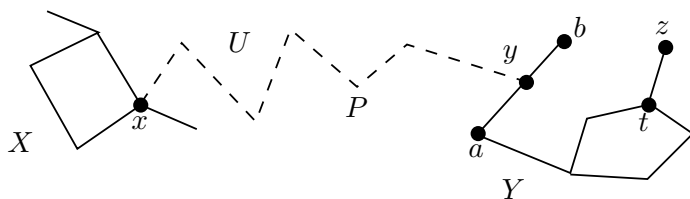
β) on suppose $m = 1$, d'où $Y = [[a, b]]$ (on peut avoir $y = a$ ou b) ; a et b sont des points terminaux de $\text{Fr}(U)$ donc $U' = U \cup [[a, b]]$ est voisinage de a et de b (U' contient des disques ouverts centrés en a et b) ; les « voisins immédiats » de a sur $[[a, b]]$ sont des points immergés dans U et on voit facilement que l'ensemble I des points de $]a, b[$ qui sont immergés est ouvert dans $]a, b[$; de même l'ensemble $]a, b[\setminus I$ des points bord de U sur $]a, b[$ est un ouvert de $]a, b[$; donc $I =]a, b[$ et par suite U' est voisinage de chacun de ses points, donc ouvert.

On décompose $P = \bigcup_{i=0}^n [[x_i, x_{i+1}]]$ avec $x_0 = x$ et $x_{n+1} = y$. On a successivement $U' \setminus [[x_0, x_1]] = U'_1$ est ouvert connexe d'après i), $U'_1 \setminus [[x_1, x_2]] = U'_2$ également, ..., $U'_n \setminus [[a, y]]$ ouvert connexe, et enfin en ôtant $[[y, b]]$, on obtient $U \setminus P$ qui est donc aussi un ouvert connexe.

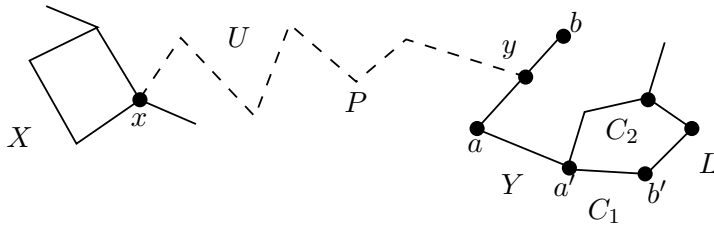


γ) $m \leadsto m + 1$: y appartient à un segment $[[a, b]]$ de Y ;

cas 1 : il existe $z \in Y$, $z \neq a, b$ et z point terminal de $\text{Fr}(U)$ correspondant au segment $S = [[t, z]]$. Les points de $]t, z[$ sont alors immergés et on a (comme vu pour $m = 1$) $U' = U \cup]t, z[$ est ouvert et la composante connexe de sa frontière contenue dans Y a un segment en moins ; d'après l'hypothèse de récurrence $U'' = U' \setminus P$ est ouvert connexe, $z \in U''$, $t \in \text{Fr}(U'')$: d'après le i) $U'' \setminus]t, z[= U \setminus P$ est ouvert connexe.



cas 2 : sinon Y contient une ligne polygonale fermée L qui est un arc de JORDAN : $\mathbb{R}^2 \setminus L$ est constitué de deux composantes connexes C_1 et C_2 dont l'une, disons C_1 , contient U ; soit $S = [[a', b']]$ un segment de L adjacent à U (on se convainc aisément que S existe !) :
 – $U' = U \cup \overset{\circ}{S} \cup C_2$ est connexe ; en effet, comme $\overset{\circ}{S} \subset \overline{U}$ et $\overset{\circ}{S} \subset \overline{C_2}$,
 $U' = (U \cup \overset{\circ}{S}) \cup (C_2 \cup \overset{\circ}{S})$ est réunion de deux connexes qui se coupent ;



– U' est ouvert puisque les points de $\overset{\circ}{S}$ sont des points de la frontière de $U \cup C_2$ de type immergé. La composante connexe de la frontière de U' contenue dans Y a un segment en moins : d'après l'hypothèse de récurrence $U'' = U' \setminus P$ est ouvert connexe ; on a $U \setminus P = U'' \setminus ([a', b'] \cup C_2)$ avec $a', b' \in \text{Fr}(U'')$ dans la même composante connexe $Y \setminus]a', b'[[$ de $\text{Fr}(U'')$; d'après ii) $U'' \setminus]a', b'[[$ a deux composantes connexes : C_2 est forcément l'une d'entre elles, l'autre est donc exactement $U'' \setminus (C_2 \cup]a', b'[[$) et cet ensemble est précisément $U \setminus P$. $\square$

Les propriétés de la proposition 5.2.5 sont illustrées par la figure 5.10.

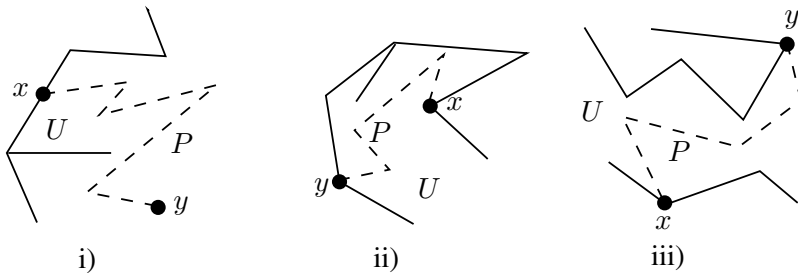


Figure 5.10 – Illustration des trois alternatives décrites en proposition 5.2.5.

5.2.3 Graphes plongés

Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe planaire et $\sigma : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un plongement quelconque :

$$\sigma : V \sqcup E \longrightarrow \mathbb{R}^2 \sqcup \mathcal{C}_{\mathbb{R}^2}.$$

Les courbes $\sigma(e)$ sont donc des lignes polygonales disjointes (sauf aux extrémités) ; le graphe est bien visible par son dessin $F = \sigma(V) \cup \bigcup_{e \in E} \sigma(e)$ puisque les $\sigma(v)$ correspondent aux sommets v et les $\sigma(e)$ aux arêtes e de Γ .

Convention et notations. Dans ce qui suit, on supposera généralement que Γ est **plongé** dans le plan, c'est-à-dire $V \subset \mathbb{R}^2$; $e = ([x, y], n) \in E$ désigne l'arête abstraite, matérialisée par la ligne polygonale $\gamma_e = \xi_e([0, 1])$; donc le dessin du graphe est simplement $F = V \cup \bigcup_{e \in E} \gamma_e$.

5.2.4 Faces

Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe plongé et F le dessin correspondant dans $\mathbb{R}^2$. Comme F est une partie compacte, donc fermée du plan, $\mathbb{R}^2 \setminus F$ est un ouvert, qui se décompose en composantes connexes (ouvertes, voir rappel en 5.2.1), que l'on appelle **faces** de F , ou du graphe plongé Γ : on peut donc écrire

$$\mathbb{R}^2 \setminus F = \bigsqcup_{\varphi \in \Phi} \varphi,$$

où $\Phi = \Phi(\Gamma)$ est l'ensemble des faces de Γ . De plus F est borné (inclus dans un disque $D(0, r)$ pour r assez grand), donc une face, et une seule, n'est pas bornée : elle est appelée la **face infinie** de F .

Pour $\varphi \in \Phi$, on note

$$\overline{\varphi} \cap F = \text{Fr}(\varphi)$$

la **frontière** de φ .

Si $\gamma_e \subset \text{Fr}(\varphi)$, on dit que l'arête e est **adjacente** à φ , ou qu'elle borde φ , et que φ est adjacente à e .

Il apparaît évident que $\text{Fr}(\varphi)$ est la réunion d'arcs polygonaux « entiers » γ_e , $e \in E_\varphi \subset E$. Il faut cependant le justifier !! Cela découlera du résultat suivant.

Proposition 5.2.6. *Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe planaire plongé dans $\mathbb{R}^2$ et $e \in E$ une arête. Alors*

- i) *si e est sur un cycle de Γ , γ_e est adjacente à deux faces exactement φ_1, φ_2 et $\gamma_e \subset \text{Fr}(\varphi_1) \cap \text{Fr}(\varphi_2)$;*
- ii) *si e n'est pas sur un cycle, γ_e est adjacente à une seule face φ : $\gamma_e \subset \text{Fr}(\varphi)$.*

Démonstration. i) Si l'arête $e = ([x, y], n)$ est sur un cycle, elle est sur un cycle élémentaire C , qu'on peut supposer de longueur minimum, donc sans corde. γ_e est tracée dans une face U de $\Gamma \setminus e$. Comme C est un cycle, x et y sont dans la même composante connexe de $\text{Fr}(U)$, $C \setminus e$ est contenu dans $\text{Fr}(U)$, donc par le ii) de la proposition 5.2.5, $U \setminus \gamma_e$ a deux composantes connexes φ_1 et φ_2 qui sont les deux faces adjacentes à γ_e .

ii) $e = ([x, y], n)$ est un isthme ; γ_e est tracée dans une face $U = \varphi$ de $\Gamma \setminus e = \Gamma_1 + \Gamma_2$; x et y sont dans deux composantes connexes distinctes de $\text{Fr}(U)$: $x \in V(\Gamma_1)$, $y \in V(\Gamma_2)$, donc par le iii) de la proposition 5.2.5, γ_e ne déconnecte pas φ donc est adjacente à une seule face.

Les deux cas sont présentés en figure 5.11. □

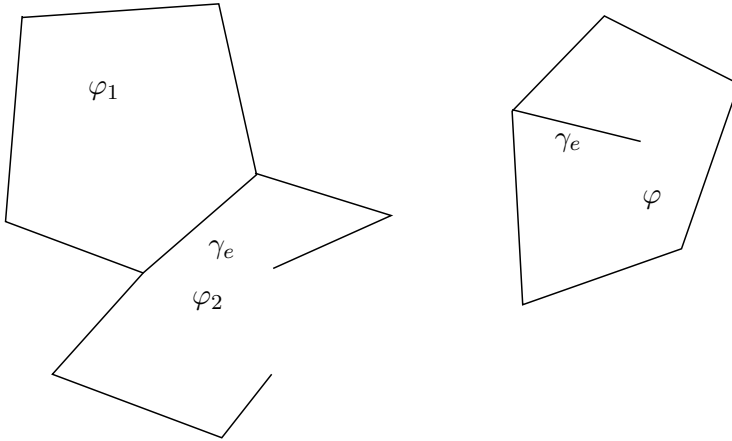


Figure 5.11 – À gauche : γ_e est adjacente à deux faces φ_1, φ_2 . À droite : γ_e est adjacente à une face φ .

On voit donc avec cette proposition que pour toute face φ de F , $\text{Fr}(\varphi)$ est bien constituée de lignes polygonales γ_e , $e \in E_\varphi$: $\text{Fr}(\varphi)$ est le dessin dans le plan d'un sous-graphe de Γ , appelé **bord** de φ et noté $\partial\varphi = (V_\varphi; E_\varphi)$ où $E_\varphi = \{e \in E : \gamma_e \subset \text{Fr}(\varphi)\}$ et V_φ est l'ensemble des extrémités de toutes les arêtes $e \in E_\varphi$.

Il semble clair que, pour un graphe d'ordre fini, le nombre de faces d'un quelconque de ses dessins est fini.

Proposition 5.2.7. *Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe planaire plongé dans $\mathbb{R}^2$. L'ensemble Φ des faces de Γ est fini.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur le nombre d'arêtes de Γ . Si $|E| = 0$, il n'y a qu'une seule face, le dessin de Γ étant le plan privé d'un nombre fini de points. Si $E = \{e\}$ alors Γ admet au plus deux faces : si e est une boucle, il y a deux faces d'après le théorème 5.2.4 ; sinon γ_e est un arc polygonal non fermé et il n'y a qu'une seule face d'après le point i) de la proposition 5.2.5.

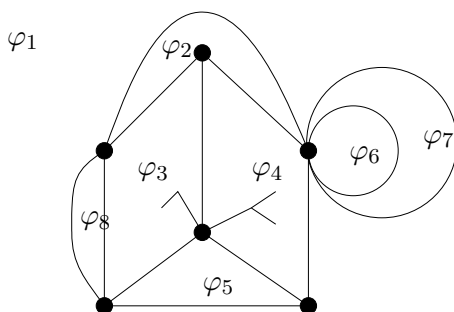


Figure 5.12 – Graphe planaire à 6 sommets et 8 faces ; la face φ_1 est la face infinie.

On suppose que Γ a $m + 1$ arêtes. Soit e l'une d'entre elles : alors $\overset{\circ}{\gamma}_e$ est inclus dans une seule face φ de $\Gamma \setminus e$ donc ses extrémités x, y sont dans $\overline{\varphi}$; les autres faces ne sont pas modifiées lorsqu'on ajoute γ_e au dessin de $\Gamma \setminus e$.

- si y (ou x) est dans φ , le rajout au dessin de $\Gamma \setminus e$ de la courbe γ_e ne déconnecte pas φ (cf. i) de la proposition 5.2.5) de sorte que Γ a le même nombre de faces que $\Gamma \setminus e$;
- si $x, y \in \text{Fr}(\varphi)$, le ii) et le iii) de la proposition 5.2.5 montrent que le rajout de γ_e scinde φ en au plus deux composantes connexes : le nombre de faces augmente donc d'au plus une unité. $\square$

On notera aussi qu'en général, la frontière d'une face n'est pas nécessairement connexe : il suffit de considérer le graphe composé de deux cycles disjoints, par exemple deux cercles concentriques de rayons différents. Ce graphe admet 3 faces, la face intermédiaire (couronne) ayant sa frontière non connexe.

On montre maintenant qu'un arbre, ou une forêt, est planaire.

Proposition 5.2.8. *Toute forêt finie Γ peut être plongée dans le plan et son dessin ne possède qu'une seule face.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur $|E|$. Si la forêt n'a pas d'arête, c'est-à-dire si $|E| = 0$, le résultat est clair.

On suppose que la forêt possède $m + 1$ arêtes. On retire l'une de ses arêtes e et on plonge $\Gamma \setminus e$, qui reste une forêt, dans le plan selon un plongement noté $\sigma : V \sqcup E \setminus e \longrightarrow \mathbb{R}^2 \cup \mathcal{C}_{\mathbb{R}^2}$; soit F le dessin de $\Gamma \setminus e$ correspondant. Alors par hypothèse de récurrence, $\varphi := \mathbb{R}^2 \setminus F$ est l'unique face de F , c'est donc un ouvert connexe par arcs polygonaux.

Désignons par x et y les extrémités de e ; x (respectivement y) appartient à une composante connexe C (respectivement C') de F et $C \neq C'$. Par le iii) de la proposition 5.2.5, on obtient le résultat car $x, y \in F = \text{Fr}(\varphi)$. $\square$

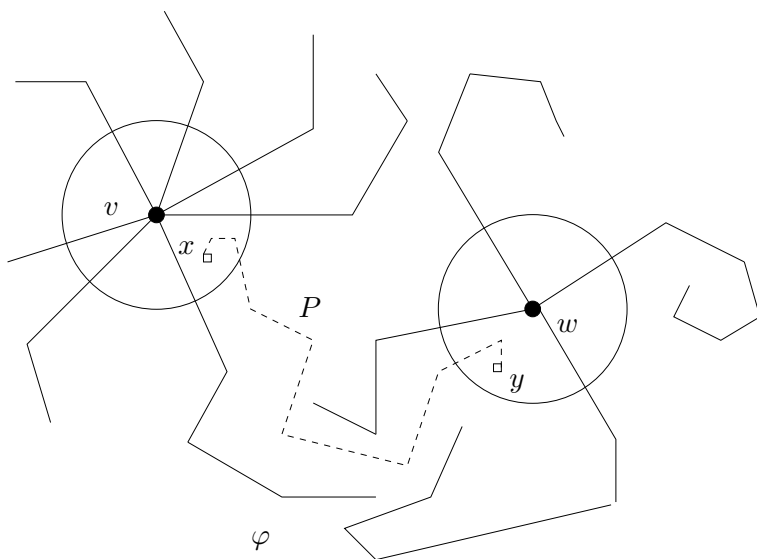


Figure 5.13 – Forêt plongée dans le plan.

5.2.5 La formule d'EULER

En 1750, Leonhard EULER a découvert et établi une formule remarquable liant le nombre de faces, le nombre de sommets et le nombre d'arêtes d'un graphe plongé dans $\mathbb{R}^2$.

Théorème 5.2.9 (Formule d'EULER). *Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe d'ordre fini, plongé dans $\mathbb{R}^2$. On pose $n = |V|$, $m = |E|$ et $f = |\Phi|$ le nombre de faces de Γ . Alors, si Γ est connexe, on a*

$$n - m + f = 2.$$

Plus généralement, si Γ possède exactement c composantes connexes, on a

$$n - m + f = c + 1.$$

Démonstration. Démontrons le cas général par récurrence sur le nombre d'arêtes de Γ .

Si $m = 0$ alors $n = c$ et $f = 1$ (le plan privé de s points est connexe) : $n - m + f = c - 0 + 1 = c + 1$.

$m \curvearrowright m + 1$: fixons une arête e et notons $\Gamma \setminus e$ le sous-graphe obtenu en ôtant l'arête e ; γ_e est tracée dans une face φ de $\Gamma \setminus e$; soient x, y ses extrémités :

- si x (ou y) est dans φ , le i) de la proposition 5.2.5 montre que γ_e ne déconnecte pas $\Gamma \setminus e$: le nombre de faces f reste inchangé quand on passe de $\Gamma \setminus e$ à Γ et c devient $c - 1$ car l'un des sommets x ou y est isolé dans $\Gamma \setminus e$ alors qu'ils sont reliés dans Γ ; le nombre d'arêtes, quant à lui, augmente d'une unité et la formule d'EULER reste vraie ;
- si x et y sont dans la même composante connexe de $\text{Fr}(\varphi)$, le ii) de la proposition 5.2.5 montre que γ_e coupe la face φ en deux : f augmente de 1 et c est inchangé, donc la formule persiste ;
- si x et y sont dans des composantes connexes distinctes de $\text{Fr}(\varphi)$, le iii) de la proposition 5.2.5 montre que f est inchangé et c diminue d'une unité. □

Corollaire 5.2.10. *Soit Γ un graphe planaire. Le nombre de faces f ne dépend pas du plongement de Γ choisi. En particulier, le nombre de faces vaut 1 si Γ est un arbre.*

Démonstration. La formule d'EULER donne $f = c + 1 - n + m$ et f ne dépend que de Γ . □

Les bords $\partial\varphi$ des faces contiennent en général des cycles : la seule exception est précisément le cas des forêts.

Proposition 5.2.11. *Soit Γ un graphe plongé dans le plan.*

- i) *Si Γ est une forêt, il y a une seule face φ et $\partial\varphi$ est sans cycle.*
- ii) *S'il existe une face φ dont le bord $\partial\varphi$ est sans cycle, alors Γ est une forêt et φ est la seule face.*

Démonstration. Le point i) a déjà été démontré (voir proposition 5.2.8).
 ii) $\partial\varphi$ étant sans cycle, c'est un sous-graphe de Γ qui est une forêt, donc son dessin a une seule face : $U = \mathbb{R}^2 \setminus \text{Fr}(\varphi)$ est connexe. Il en résulte que Γ n'a qu'une face, car si ψ était une autre face on aurait $\psi \subset U$; en prenant $x \in \psi$, $y \in \varphi$ on pourrait tracer un arc α de x à y **dans** U (car U est connexe par arcs) ; l'arc α couperait alors φ et $\mathbb{R}^2 \setminus \varphi$ car

$\psi \subset \mathbb{R}^2 \setminus \varphi$, donc couperait $\text{Fr}(\varphi)$, mais alors $U \cap \text{Fr}(\varphi) \neq \emptyset$: absurde (voir figure 5.14).

Alors Γ est sans cycle, c'est-à-dire une forêt, puisque si e est sur un cycle, e est adjacente à deux faces (voir proposition 5.2.6). $\square$

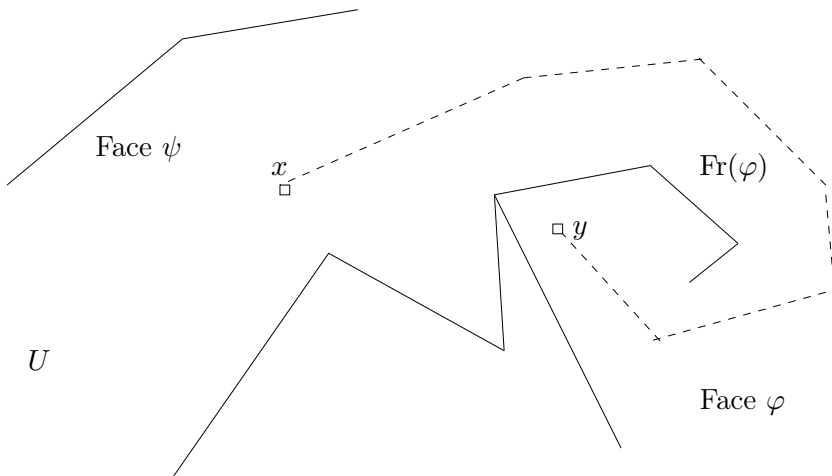


Figure 5.14 – La ligne polygonale en pointillés relie $x \in \psi$ à $y \in \varphi$, en restant dans U .

Rappelons que la maille d'un graphe simple $\Gamma = (V; E)$, notée $\mu(\Gamma)$, est la longueur du plus petit cycle contenu dans Γ (voir chapitre 1) : $\mu(\Gamma) = +\infty$ lorsque Γ est sans cycle, donc est une forêt ; sinon $|E| \geq \mu(\Gamma) \geq 3$.

Le nombre $\mu(\Gamma)$ est lié aux nombres $m = |E|$, $n = |V|$, $f = |\Phi|$ comme on va le voir à la proposition 5.2.14.

Proposition 5.2.12. *Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe simple planaire plongé dans $\mathbb{R}^2$. Si $\mu(\Gamma) < +\infty$, toute face φ admet un bord $\partial\varphi$ constitué d'au moins $\mu(\Gamma)$ arêtes.*

Démonstration. Soit $\partial\varphi = (V'; E')$; si on avait $|E'| < \mu(\Gamma)$, $\partial\varphi$ serait sans cycle donc, d'après la proposition 5.2.11, Γ serait une forêt dont l'unique face serait φ et on aurait donc $\mu(\Gamma) = +\infty$. $\square$

Proposition 5.2.13. *Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe planaire plongé dans $\mathbb{R}^2$ avec $|E| \geq 3$. Soit φ une face. On a*

- i) *si φ est adjacente à exactement une arête e , alors e est une boucle ;*

- ii) si φ est adjacente à exactement deux arêtes e et e' qui ne sont pas des boucles, alors e et e' forment une arête double ;
- iii) si Γ est simple, toute face est adjacente à au moins 3 arêtes.

Démonstration.

- i) Si e n'était pas une boucle, $\partial\varphi$ serait sans cycle, donc (voir proposition 5.2.11), le graphe Γ serait une forêt d'unique face φ et aurait une seule arête.
- ii) Si e et e' ne formaient pas un cycle, $\partial\varphi$ serait sans cycle. Comme ci-dessus on en déduirait que Γ serait une forêt d'unique face φ , qui aurait donc deux arêtes.
- iii) On distingue deux cas :
 - si le graphe est une forêt : il a une face et comme $|E| \geq 3$ cette face est adjacente à au moins 3 arêtes ;
 - sinon $\mu(\Gamma) < \infty$ et on applique la proposition 5.2.12. □

Proposition 5.2.14. Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe simple connexe d'ordre fini, plongé dans $\mathbb{R}^2$, avec $|V| = n$, $|E| = m$ et $\mu(\Gamma) = \mu$:

- i) si $\mu = +\infty$, alors $m = n - 1$;
- ii) si $\mu < +\infty$, alors $m \leq \frac{\mu}{\mu-2}(n-2)$. En particulier $m \leq 3(n-2)$;
- iii) si $\mu < +\infty$ et si Γ est sans 3-cycle, on a $m \leq 2n - 4$.

Démonstration.

- i) En effet Γ est un arbre (voir théorème 2.2.1) ;
- ii) Considérons le graphe $\Gamma^* = (V^*; E^*, N^*)$ ainsi défini :
 - l'ensemble des sommets de Γ^* est $V^* = \Phi$, l'ensemble des faces de Γ ;
 - l'ensemble des arêtes est E^* , où $([\varphi, \psi], e) \in E^*$ si et seulement si l'arête $e \in E$ est adjacente aux faces φ et ψ ;
 - $N^* = E$.

Ce graphe, appelé dual de Γ et qui sera étudié plus loin, peut très bien avoir des boucles et des arêtes doubles. On a

- $\sum_{\varphi \in \Phi} d(\varphi) = 2|E^*|$ où $d(\varphi)$ est le degré du sommet φ de Γ^* (voir lemme 1.1.9) ;
- $|E^*| \leq m$ car l'application $f : E \longrightarrow E^*$ qui à e associe $([\varphi, \psi], e) \in E^*$ où φ et ψ sont les faces adjacentes à e , est surjective ;
- par ailleurs, pour $\varphi \in \Phi$, le degré $d(\varphi)$ est au moins égal au nombre d'arêtes adjacentes à φ (c'est, dans Γ^* , deux fois le nombre de boucles ajouté au nombre d'arêtes qui ne sont pas des boucles) ; ce nombre est au moins égal à μ d'après la proposition 5.2.12.

Il en résulte que

$$\mu \cdot f \leq \sum_{\varphi \in \Phi} d(\varphi) = 2|E^*| \leq 2m.$$

On applique la formule d'EULER (avec $c = 1$) :

$$m = n + f - 2 \leq n + \frac{2m}{\mu} - 2,$$

d'où $m \leq \frac{\mu}{\mu-2}(n-2)$. Comme $\mu \geq 3$, on a $\frac{\mu}{\mu-2} \leq 3$ d'où la seconde majoration.

iii) Dans ce cas $\mu \geq 4$ et $\frac{\mu}{\mu-2} \leq 2$; le résultat découle alors de ii) ci-dessus. $\square$

Exercice 5.1. Montrer que la borne supérieure de ii) de la proposition 5.2.14 est optimale.

Cette proposition confirme l'intuition qu'un graphe planaire ne peut pas comporter trop d'arêtes par rapport au nombre de sommets.

Corollaire 5.2.15. *Les graphes K_5 et $K_{3,3}$ ne sont pas planaires.*

Démonstration. Ces graphes sont connexes et ne sont pas des arbres. Pour chacun de ces deux graphes, on note respectivement n , m et μ , son nombre de sommets, son nombre d'arêtes et sa maille.

Pour K_5 , on a $n = 5$, $m = 10$ et $\mu = 3$, donc $\frac{\mu}{\mu-2}(n-2) = 3(n-2) = 9$ contredit la majoration ii) de la proposition 5.2.14 : K_5 ne peut être planaire.

Pour $K_{3,3}$, on a $n = 6$, $m = 9$ et $\mu = 4$: d'où $\frac{\mu}{\mu-2}(n-2) = 2(n-2) = 8$ et $K_{3,3}$ ne peut non plus être planaire. $\square$

Corollaire 5.2.16. *Tout graphe simple planaire $\Gamma = (V; E)$ a au moins un sommet dont le degré est au plus 5.*

Démonstration. En effet, sans perte de généralité, on peut supposer que le graphe est connexe et qu'il a au moins trois sommets.

i) Si $\mu(\Gamma) = +\infty$, alors $|E| = |V| - 1$ d'après le i) de la proposition 5.2.14, donc $\delta(\Gamma) = 1$.

ii) Si $\mu(\Gamma) < +\infty$ et si $d(x) \geq 6$ pour tout $x \in V$, alors d'après le lemme 1.1.9, on aurait $2m = \sum_{x \in V} d(x)$ donc $2m \geq 6n$; cela entraînerait que $3n \leq m$. Mais d'après le ii) de la proposition 5.2.14 on a $m \leq 3n - 6$: contradiction. $\square$

Exercice 5.2. Montrer que l'énoncé du corollaire 5.2.16 devient faux si Γ n'est pas supposé simple.

Lemme 5.2.17. *Un graphe planaire peut être plongé dans le plan de telle sorte qu'une face donnée soit la face infinie.*

Démonstration. Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ notons x, y, u les coordonnées d'un point M et considérons la sphère unité $S_2 = \{(x, y, u) : x^2 + y^2 + u^2 = 1\}$. Munie de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^3$, la sphère S_2 est un espace compact. Soit N le point de S_2 de coordonnées $(0, 0, 1)$: le « pôle nord » de la sphère. Considérons la projection stéréographique ν de pôle N . Elle associe à tout point M de S_2 distinct de N le point du plan $u = 0$ aligné avec N et M . Son affixe complexe z est donné par la formule

$$z = \frac{x + iy}{1 - u}$$

où x, y, u sont les coordonnées de M . L'application $\nu : (x, y, u) \mapsto z$ est un homéomorphisme de $S_2 \setminus N$ sur $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}$ identifié à $\mathbb{R}^2$ (voir figure 5.15).

Un graphe planaire Γ de dessin F étant donné, il lui correspond un dessin $F' = \nu^{-1}(F)$ sur $S_2 \setminus N$; on constate qu'une rotation ρ bien choisie sur la sphère permet de mettre le point N à l'intérieur d'une face $\nu^{-1}(\varphi)$ de F' ; en appliquant ν on obtient $F'' = \nu \circ \rho \circ \nu^{-1}(F)$ homéomorphe à F , qui est un autre dessin de Γ pour lequel la face $\nu \circ \rho \circ \nu^{-1}(\varphi)$ correspondant à φ est la face infinie. $\square$

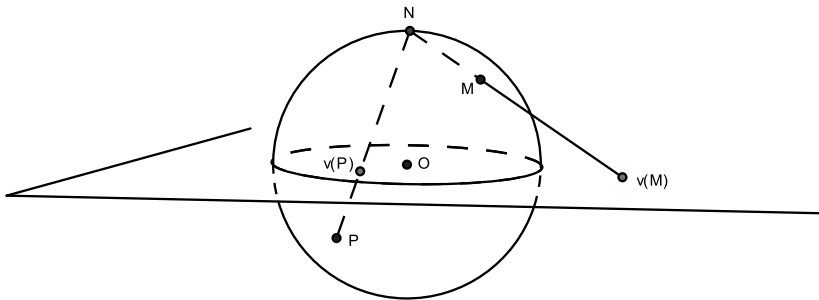


Figure 5.15 – La projection stéréographique. L'hémisphère nord s'envoie à l'extérieur du disque unité, l'équateur est invariant, l'hémisphère sud s'envoie à l'intérieur du disque unité.

Théorème 5.2.18. *Un graphe $\Gamma = (V; E, N)$ est planaire si et seulement si tous ses blocs sont planaires.*

Démonstration. Le sens direct est clair. Réciproquement, on raisonne par récurrence sur le nombre de blocs de Γ . Il suffit de montrer que chacune des composantes connexes de Γ est planaire. D'après la proposition 5.2.3, on peut supposer que Γ est simple.

Si le graphe n'a qu'un seul bloc, il n'y a rien à prouver. Soit Γ un graphe connexe simple ayant $k + 1$ blocs, avec $k \geq 1$. Le graphe des blocs $\mathfrak{b}(\Gamma)$ est un arbre (voir proposition 4.2.5). Donc Γ possède un bloc B ayant un unique sommet d'articulation x (il suffit de prendre une feuille de $\mathfrak{b}(\Gamma)$). Par l'hypothèse de récurrence et le lemme 5.2.17, les sous-graphes B et $\Gamma \setminus B$ peuvent être plongés dans $\mathbb{R}^2$ de sorte que x soit sur le bord de la face infinie de chacun des graphes B et $\Gamma \setminus B$. Plus précisément, B et $\Gamma \setminus B$ peuvent être dessinés de façon séparée dans deux demi-plans complémentaires de $\mathbb{R}^2$, avec le sommet d'articulation x sur la droite frontière. $\square$

Ce théorème montre l'importance des graphes 2-connexes dans l'étude de la planarité. On va s'y intéresser de plus près au paragraphe suivant.

5.2.6 Graphes planaires 2-connexes

Proposition 5.2.19. *Dans un graphe planaire 2-connexe Γ , les bords des faces sont des cycles élémentaires.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur le nombre d'arêtes du graphe 2-connexe Γ . Si Γ est un cycle élémentaire, le résultat est clairement vrai. Si Γ a 3 arêtes, c'est un triangle qui est un cycle élémentaire et qui borde les deux faces de Γ .

Puisque tout graphe 2-connexe est obtenu par la méthode des chaînes (voir proposition 4.2.8), si Γ n'est pas un cycle, alors on peut écrire $\Gamma = \Gamma' \cup P$ où Γ' est un graphe 2-connexe et P est une chaîne élémentaire reliant deux sommets de Γ' et ne passant par aucun autre sommet de Γ' .

Par hypothèse de récurrence, les faces de Γ' ont leurs frontières qui sont des cycles élémentaires. Par construction de P , il existe une unique face φ' de Γ' contenant $\overset{\circ}{P}$. Puisque Γ est 2-connexe, les extrémités x, y de la chaîne P sont sur la frontière de φ' . Par le ii) de la proposition 5.2.5 il s'ensuit que P partage la face φ' en deux faces φ_1, φ_2 de Γ , ces deux faces étant délimitées par deux cycles élémentaires (empruntant la chaîne P).

Les autres faces de Γ sont en fait des faces de Γ' , elles ont donc pour frontière (par hypothèse de récurrence) des cycles élémentaires. $\square$

5.3 Comparaison des plongements

Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe planaire. On considère deux plongements :

$$\sigma, \sigma' : V \sqcup E \longrightarrow \mathbb{R}^2 \sqcup \mathcal{C}_{\mathbb{R}^2}$$

associés aux dessins $F = \sigma(V) \cup \bigcup_{e \in E} \sigma(e)$, $F' = \sigma'(V) \cup \bigcup_{e \in E} \sigma'(e)$ et ayant comme ensembles de faces Φ, Φ' .

Les deux graphes $\Gamma^\sigma = (\sigma(V); \sigma(E), N)$ et $\Gamma^{\sigma'} = (\sigma'(V); \sigma'(E), N)$ sont donc plongés dans le plan (et isomorphes à Γ). On en déduit un isomorphisme de graphes, noté $\tau = \sigma' \circ \sigma^{-1}$ par commodité :

$$\begin{aligned} \tau : \Gamma^\sigma &\longrightarrow \Gamma^{\sigma'} \\ v \in V &\longmapsto \sigma'(\sigma^{-1}(v)) \\ e \in E &\longmapsto \sigma'(\sigma^{-1}(e)). \end{aligned}$$

En outre on a $|\Phi| = |\Phi'|$, d'après le théorème d'EULER.

On dira que τ est un **isomorphisme planaire** entre Γ^σ et $\Gamma^{\sigma'}$ si l'on peut prolonger τ en une bijection $\Phi \longrightarrow \Phi'$ préservant l'adjacence :

$$e \text{ adjacente à } \varphi \iff \tau(e) \text{ adjacente à } \tau(\varphi) ;$$

on dira alors que σ et σ' sont **planaiement équivalents**.

Exemple 5.3.1. Si Γ est une forêt, tous ses plongements sont planaiement équivalents, puisqu'il n'y a qu'une seule face. Dans la figure 5.16 les deux plongements ne sont pas planaiement équivalents.

Exercice 5.3.

- i) Montrer qu'il y a 2 isomorphismes τ et τ' entre les deux plongements Γ^σ et $\Gamma^{\sigma'}$ dessinés à la figure 5.16.
- ii) Montrer qu'aucun de ces isomorphismes ne se prolonge en un isomorphisme planaire.

Lorsque le graphe est « suffisamment connexe », nous allons prouver que tous ses plongements planaires sont planaiement équivalents.

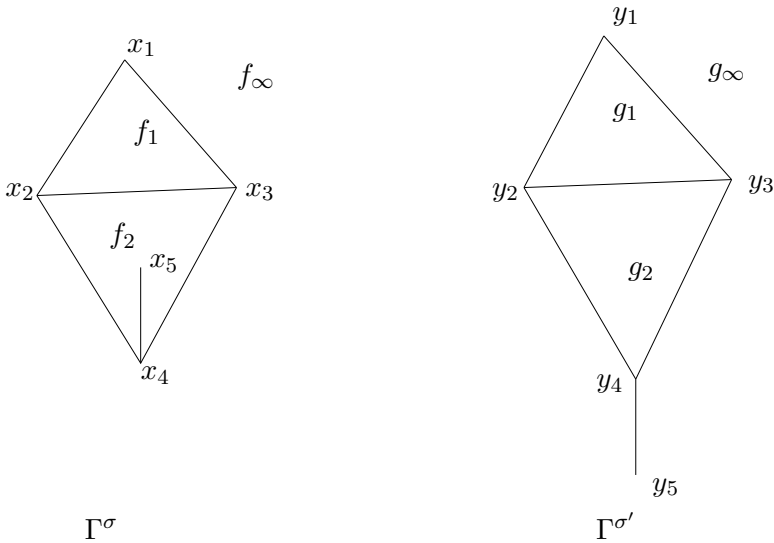


Figure 5.16 – Deux plongements non planairement équivalents.

Théorème 5.3.2 (WHITNEY, 1932). *Soit Γ un graphe planaire simple, connexe, d'ordre fini et 3-connexe. Alors tous ses plongements sont planairement équivalents.*

Démonstration. Soient deux plongements : $\sigma : \Gamma \longrightarrow \Gamma^\sigma = (V; E, N)$ et $\sigma' : \Gamma \longrightarrow \Gamma^{\sigma'} = (V'; E', N')$ du graphe planaire 3-connexe Γ , associés aux dessins F et F' , admettant comme ensembles de faces Φ et Φ' .

On a donc un isomorphisme $\tau = \sigma' \circ \sigma^{-1}$ entre Γ^σ et $\Gamma^{\sigma'}$. Nous devons démontrer que si φ est une face de Γ^σ , alors $\beta := \tau(\partial\varphi)$ est le bord d'une face de $\Gamma^{\sigma'}$; d'abord β est un cycle élémentaire, puisque $\partial\varphi$ l'est, le graphe étant 2-connexe (cf. proposition 5.2.19) ; donc β correspond à une courbe de JORDAN d'intérieur U et d'extérieur W ; Γ étant 3-connexe, $F \setminus \partial\varphi$ est connexe (cf. théorème de MENGER), donc $F' \setminus \beta$ est connexe et par suite $F' \setminus \beta$ est inclus dans U ou dans W ; supposons par exemple que $F' \setminus \beta \subset U$; donc $F' \subset U \cup \beta \subset \overline{U}$ et W ne contient aucun sommet de $\Gamma^{\sigma'}$: W est une face ψ de $\Gamma^{\sigma'}$: $\partial\psi = \beta$. $\square$

Exercice 5.4. On considère les deux graphes plongés Γ et Γ' de la figure 5.17.

- i) Montrer que Γ et Γ' sont 3-connexes.

- ii) On définit $\tau(i) = i'$, pour $1 \leq i \leq 3$; montrer que τ se prolonge de façon unique en un isomorphisme $\tau : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$.
- iii) Montrer que τ est un isomorphisme planaire et vérifier la preuve du théorème de WHITNEY.

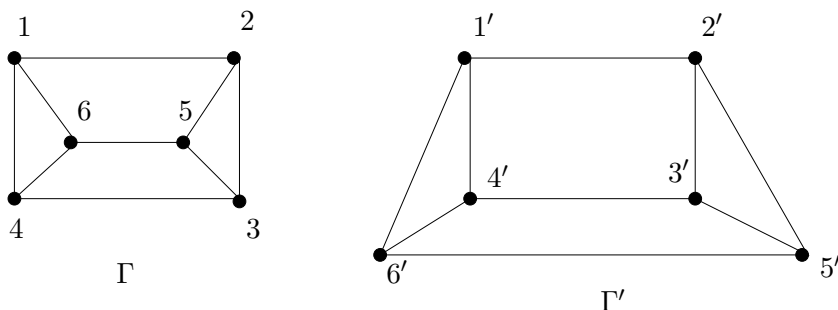


Figure 5.17 – Isomorphisme planaire.

Remarque 5.3.3. Soit Γ un graphe planaire plongé dans le plan et e une arête de Γ . On note Γ_e le sous-graphe induit par les sommets « en contact » avec les faces auxquelles e est adjacente. La formule d'EULER appliquée à Γ_e montre que le nombre de ces faces ne dépend pas du plongement choisi à l'intérieur d'une classe de plongements planairement équivalents.

Il existe une autre notion d'isomorphisme, de nature topologique, qui correspond assez bien à l'intuition; gardons les mêmes notations : soient deux plongements $\sigma : \Gamma \longrightarrow \Gamma^\sigma = (V; E, N)$ et $\sigma' : \Gamma \longrightarrow \Gamma^{\sigma'} = (V'; E', N')$ du graphe planaire Γ , associés aux dessins F et F' , admettant comme ensembles de faces Φ et Φ' ; on a un isomorphisme de graphes $\tau = \sigma' \circ \sigma^{-1}$ entre Γ^σ et $\Gamma^{\sigma'}$; on dira que ces deux plongements sont **topologiquement équivalents** si τ se prolonge en un homéomorphisme

$$\tau^* : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

tel que $\tau^*|_F : F \longrightarrow F'$ soit un homéomorphisme. Il est clair que cette notion est plus forte que l'équivalence planaire.

Exercice 5.5. On considère les deux plongements σ, σ' d'un graphe Γ induisant les graphes plongés $\Gamma^\sigma, \Gamma^{\sigma'}$ de la figure 5.18, de dessins F, F' .

- a) Montrer que σ et σ' sont planairement équivalents.
- b) Soit $\pi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un homéomorphisme tel que $\pi(F) = F'$.

- i) Montrer que $\pi(v) = v'$.
- ii) Montrer que $\pi(\{x, y\}) = \{x', y'\}$.
- iii) En considérant les segments $[[x', y']]$ et $\pi^{-1}([[x', y']])$, montrer que cela conduit à une impossibilité : les plongements ne sont pas topologiquement équivalents.

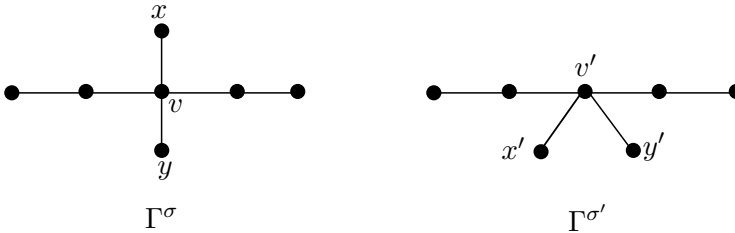


Figure 5.18 – Deux plongements non topologiquement équivalents.

5.4 Le théorème de KURATOWSKI

Une **subdivision élémentaire** d'un graphe $\Gamma = (V; E, N)$ est un graphe $\Gamma' = (V'; E', N')$ défini de la manière suivante :

- $V' = V \sqcup \{x_1, \dots, x_k\}$ (on rajoute $k \geq 1$ sommets) ;
- $N' = N$;
- on remplace **une** arête $a = ([x, y], n)$ par une chaîne simple :

$$(x_0, e_0, x_1, e_1, \dots, x_k, e_k, x_{k+1})$$

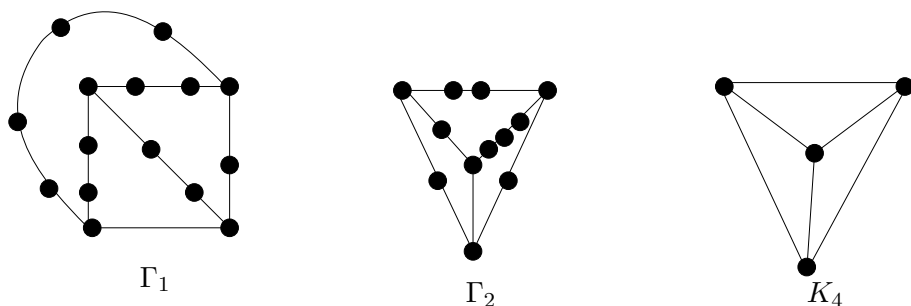
où $e_i = (\{x_i, x_{i+1}\}, n)$ sont des arêtes simples de Γ' et $x_0 = x$, $x_{k+1} = y$;

- $E' = (E \setminus \{a\}) \cup \{e_i, 0 \leq i \leq k\}$.

Une **subdivision** d'un graphe $\Gamma = (V; E, N)$ est une succession finie de subdivisions élémentaires.

Soient Γ_0 et Γ deux graphes. On dira qu'un graphe Γ **contient une subdivision de Γ_0** si Γ contient (au moins) un sous-graphe Γ' qui est isomorphe à une subdivision de Γ_0 . Un exemple est présenté en figure 5.19.

Les graphes $K_{3,3}$ et K_5 ne sont pas planaires, on l'a vu (voir corollaire 5.2.15) ; ce sont précisément les seules obstruction à la planarité, comme le montre le fameux théorème de KURATOWSKI.

Figure 5.19 – Γ_1 et Γ_2 sont des subdivisions de K_4 .

Théorème 5.4.1 (KURATOWSKI, 1930). *Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe simple d'ordre fini; les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- i) *le graphe Γ est planaire ;*
- ii) *le graphe Γ ne contient pas de subdivision de K_5 ou $K_{3,3}$.*

Démonstration partielle. Il est clair que i) implique ii) (voir corollaire 5.2.15).

La preuve de la réciproque est difficile (voir [5]).

On peut néanmoins en donner une idée lorsque $\kappa(\Gamma) = 2$ (c'est-à-dire Γ est 2-connexe mais pas 3-connexe) : montrons que si $\kappa(\Gamma) = 2$, si Γ ne contient pas de subdivision de K_5 et $K_{3,3}$, et si tout graphe Γ' sans subdivision de K_5 et $K_{3,3}$ tel que $|V(\Gamma')| < |V(\Gamma)|$ est planaire, alors Γ est planaire.

Comme $\kappa(\Gamma) = 2$, il existe $x, y \in V$ tels que $\Gamma \setminus \{x, y\}$ ne soit pas connexe : on peut donc écrire $V = V_1 \sqcup V_2 \sqcup \{x, y\}$ où V_1 et V_2 ne sont pas connectés dans $\Gamma \setminus \{x, y\}$; notons $\Gamma_1 = \Gamma(V_1 \cup \{x, y\})$ et $\Gamma_2 = \Gamma(V_2 \cup \{x, y\})$ les sous-graphes induits sur $V_1 \cup \{x, y\}$ et $V_2 \cup \{x, y\}$; toute chaîne de V_1 à V_2 passe par x ou y . Fixons $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$: il y a donc deux chaînes élémentaires sommet-disjointes C_1 et C_2 entre v_1 et v_2 : nécessairement l'une passe par x , l'autre par y (voir figure 5.20).

Ces deux chaînes fournissent à leur tour deux chaînes élémentaires C'_1, C'_2 entre x et y , l'une dans Γ_1 , l'autre dans Γ_2 . Soit $a = \{x, y\}$; alors $\Gamma_1 \cup a$ et $\Gamma_2 \cup a$ sont sans subdivision de K_5 ou de $K_{3,3}$: en effet, si par exemple $\Gamma_1 \cup a$ avait une telle subdivision S , a ferait nécessairement partie des arêtes de S (puisque Γ_1 est, lui, sans subdivision de K_5 ou de $K_{3,3}$) ; alors $S' = S \setminus a \cup C'_2$ serait une subdivision de K_5 ou de $K_{3,3}$ telle que $S' \subset \Gamma$: contradiction.

Comme $|V(\Gamma_1 \cup a)|, |V(\Gamma_2 \cup a)| < |V(\Gamma)|$, les hypothèses entraînent que $\Gamma_1 \cup a$ et $\Gamma_2 \cup a$ sont planaires ; ensuite on fabrique des plongements

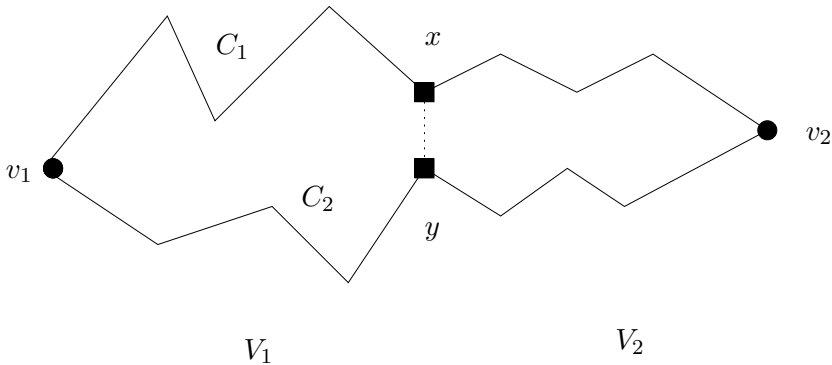


Figure 5.20 – Les deux chaînes C_1 et C_2 entre v_1 et v_2 dans la démonstration du théorème 5.4.1.

σ_1 et σ_2 de $\Gamma_1 \cup a$ et $\Gamma_2 \cup a$ de sorte que a soit sur la frontière de la face infinie des deux dessins (disjoints) ; ensuite, moyennant des déformations intuitivement possibles, on réunit $\sigma_1(\Gamma \cup a)$ à $\sigma_2(\Gamma_2 \cup a)$ en recollant les dessins le long de a , ce qui fournit un plongement de $\Gamma \cup a$, donc de Γ (il se peut d'ailleurs que $a \in E$). $\square$

L'opération inverse de la subdivision est la **contraction**, qui se définit dans le cadre des multigraphes. Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un multigraphe et $e = ([x, y], n_e) \in E$. On supprime l'arête e et on « fusionne » x et y en un seul (nouveau) sommet z_e . Ce graphe est noté $\Gamma/e = (V'; E', N')$. De façon précise :

- $V' = (V \setminus \{x, y\}) \sqcup \{z_e\}$;
- pour chaque $t \in V$, on définit $t' \in V'$ ainsi : $x' = y' = z_e$, $t' = t$ pour $t \neq x, y$;
- $E' = \{([u', v'], n) : ([u, v], n) \in E \setminus \{e\}\}$;
- $N' = N$.

Dans cette contraction, une p -arête entre x et y ($p \geq 2$) devient une $(p-1)$ -boucle en z_e et il apparaît des multi-arêtes pour chaque sommet t adjacent à la fois à x et y .

On dit qu'un multigraphe Γ est **contractile** en Γ_0 si Γ_0 peut être obtenu à partir de Γ par un nombre fini de contractions.

Exemple 5.4.2. L'un des graphes de la figure 5.21 est obtenu à partir de l'autre par une contraction.

Exercice 5.6. Montrer que si un graphe Γ' est une subdivision d'un

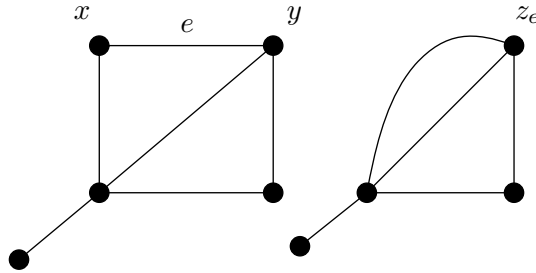


Figure 5.21 – Exemple de contraction.

graphe Γ , alors Γ est une contraction de Γ' (on raisonnera sur une subdivision élémentaire).

Cette notion a permis à K. WAGNER de donner une autre caractérisation de la planarité (voir [5]).

Théorème 5.4.3 (WAGNER, 1937). *Un graphe est planaire si et seulement s'il ne contient pas de sous-graphe contractible en K_5 ou $K_{3,3}$.*

Il existe une autre caractérisation de la planarité, qui se formule en utilisant l'algèbre linéaire et l'espace des cycles (voir théorème 6.4.5 de MACLANE).

5.5 Graphe dual

Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe planaire, $\sigma : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^2$ un plongement et Φ l'ensemble de ses faces. On définit son **graphe dual** $\Gamma_\sigma^* = (V^*; E^*, N^*)$ de la façon suivante :

- $V^* = \Phi$ (les sommets du dual sont les faces de Γ) ;
- pour chaque arête $e = ([x, y], n) \in E$, on définit $e^* \in E^*$ ainsi : le dessin γ_e de e est adjacent à une ou deux faces $\varphi, \psi \in \Phi$; on pose $e^* = ([\varphi, \psi], n)$ (c'est une boucle lorsque $\varphi = \psi$) ;
- $N^* = N$.

Notons que $|E^*| = |E|$ et $|V^*| = |\Phi|$.

Cette notion fascinante est très ancienne : on la trouve déjà dans le 15^e livre des *Éléments* d'EUCLIDE !

Si l'on considère un autre plongement σ' de Γ planairement équivalent à σ , l'adjacence entre faces et arêtes est maintenue, donc les graphes

duaux Γ_σ^* et $\Gamma_{\sigma'}^*$, sont « identiques ». Cette propriété ne tient généralement plus si les plongements ne sont pas supposés planairement équivalents.

Exercice 5.7. On considère le graphe simple $\Gamma = (V; E)$ où $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $E = \{12, 23, 31, 14, 15\}$ (ij signifie $\{i, j\}$). Il se plonge dans le plan selon les deux façons indiquées à la figure 5.22. Démontrer que les duaux associés $\Gamma_\sigma^*, \Gamma_{\sigma'}^*$ ne sont pas isomorphes.

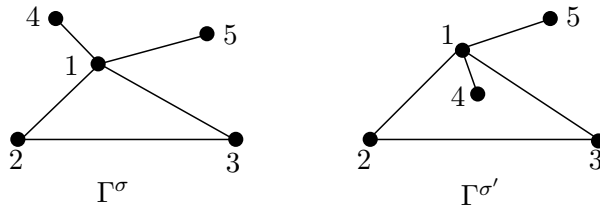


Figure 5.22 – Deux plongements de Γ .

Exemple 5.5.1.

- i) Si Γ est une forêt à m arêtes et si $\sigma : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est un plongement alors Γ_σ^* est une m -boucle.
- ii) Pour tout plongement d'une m -boucle, le dual correspondant est une chaîne à m arêtes.
- iii) Quel que soit le plongement, le dual d'un cycle C_m est toujours une m -arête (arête de multiplicité m). Inversement, le dual d'une m -arête (qui n'est pas une m -boucle) est toujours un cycle de longueur m .
- iv) Tout plongement de K_4 induit un dual de K_4 isomorphe à K_4 !
- v) Si e est un isthme dans un graphe, e^* est une boucle; si e est une boucle, e^* est un isthme.

Proposition 5.5.2. Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe planaire non nul, avec un plongement $\sigma : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Alors Γ_σ^* est connexe.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur $|E|$. Si $E = \emptyset$, alors Γ_σ^* est un sommet isolé donc évidemment connexe.

Soit Γ un graphe planaire ayant $m+1$ arêtes. Si Γ est une forêt, alors Γ_σ^* est une $(m+1)$ -boucle donc connexe. Sinon on choisit une arête e qui n'est pas un isthme : γ_e est donc adjacente à deux faces φ, ψ ; si on

supprime e cela veut dire que φ et ψ sont réunies en une seule face ; donc dans le dual Γ_σ^* tout se passe comme si on contractait l'arête e^* :

$$(\Gamma \setminus e)_\sigma^* \simeq \Gamma_\sigma^*/e^*,$$

où $\tilde{\sigma}$ est la restriction du plongement σ à $\Gamma \setminus e$.

Par l'hypothèse de récurrence, on déduit que Γ_σ^*/e^* est connexe ; la contraction d'une arête dans un graphe ne modifiant pas la connexité (lors d'une contraction, le nombre de composantes connexes reste inchangé), il en résulte que Γ_σ^* est connexe. $\square$

Comme application de la dualité, on a

Corollaire 5.5.3. *Soit Γ un graphe planaire plongé. Si pour toute face φ de Γ , la frontière $\text{Fr}(\varphi)$ est connexe, alors Γ est connexe.*

Démonstration. On désigne par Φ l'ensemble des faces de Γ . On a $\Gamma = \bigcup_{\varphi \in \Phi} \text{Fr}(\varphi)$.

Soient x et y sur Γ . Comme le dual Γ^* est connexe (cf. proposition 5.5.2), il existe une suite de faces φ_i , $i = 1, \dots, j$, telles que $\text{Fr}(\varphi_i) \cap \text{Fr}(\varphi_{i+1}) \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, j-1$, avec $x \in \text{Fr}(\varphi_1)$ et $y \in \text{Fr}(\varphi_j)$. Les frontières $\text{Fr}(\varphi_i)$ étant connexes, la réunion $\bigcup_{i=1}^j \text{Fr}(\varphi_i)$ est connexe, donc x et y sont connectés dans $\Gamma = \bigcup_{\varphi \in \Phi} \text{Fr}(\varphi)$. $\square$

Proposition 5.5.4. *Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe planaire, avec un plongement $\sigma : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Alors Γ_σ^* est planaire.*

Démonstration. Pour chaque face φ , on choisit un point $O_\varphi \in \varphi$; puis pour chaque arête e de dessin γ_e , adjacente à φ et ψ , on trace un arc polygonal dans φ de O_φ à un point de γ_e que l'on prolonge jusqu'à O_ψ par un arc polygonal dans ψ . Cela donne un arc ξ_e coupant γ_e en un seul point. Il est assez intuitif que l'on peut faire en sorte que deux arcs $\xi_e, \xi_{e'}$ ayant une (ou deux) extrémités communes O_φ et O_ψ ne se coupent qu'en cette (ou ces) extrémités. Cette construction est illustrée à la figure 5.23. $\square$

Par construction, le nombre de sommets et le nombre d'arêtes d'un graphe dual de Γ ne dépendent pas du plongement. C'est également le cas pour le nombre de faces.

Corollaire 5.5.5. *Soient $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe planaire, $\sigma : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un plongement quelconque. On note c le nombre de composantes*

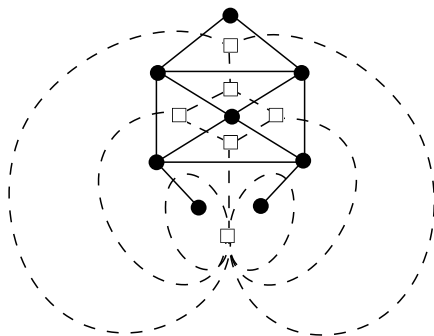


Figure 5.23 – Un graphe planaire (arêtes en trait plein) et son dual (arêtes en pointillé).

connexes de Γ . Alors le graphe dual Γ_σ^* possède exactement $|V| - c + 1$ faces.

En particulier si Γ est connexe, Γ_σ^* possède exactement $|V|$ faces.

Démonstration. On note n, m, f (respectivement n^*, m^*, f^*) les nombres de sommets, d'arêtes et de faces de Γ (respectivement Γ_σ^*).

La formule d'EULER appliquée à Γ donne $n - m + f = c + 1$. Comme Γ_σ^* est planaire et connexe, la formule d'EULER donne $n^* - m^* + f^* = 2$. Comme $n^* = f$ et $m^* = m$, le résultat s'en déduit immédiatement. $\square$

Exercice 5.8. On considère les trois graphes planaires $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ dessinés à la figure 5.24.

- i) Montrer que ces graphes sont non isomorphes deux à deux.
- ii) Montrer qu'ils ont le même dual Δ .
- iii) Montrer enfin que Δ peut se plonger de trois façons différentes dans le plan et que les duals associés à ces plongements sont $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$.

Exemple 5.5.6. Les cinq polyèdres réguliers de l'espace $\mathbb{R}^3$ fournissent des exemples spectaculaires de dualité; ces polyèdres sont : le cube T_6 (6 faces), le tétraèdre T_4 (4 faces), l'octaèdre T_8 (8 faces), le dodécaèdre T_{12} (12 faces) et l'icosaèdre T_{20} (20 faces). Si l'on place un point au centre de chaque face de l'un de ces polyèdre P et que l'on joint 2 points chaque fois que les faces correspondantes sont adjacentes, on obtient une réalisation du dual P^* de P . Avec un peu d'imagination on peut vérifier que $T_6^* \simeq T_8$, $T_8^* \simeq T_6$ et $T_4^* \simeq T_4$; on pourra observer que $T_4 \simeq K_4$; il est plus difficile de voir que T_{12} et T_{20} sont duals l'un de l'autre.

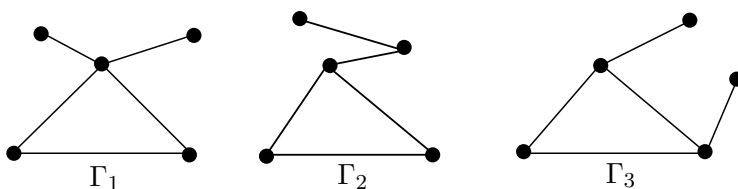


Figure 5.24 – Trois graphes non isomorphes ayant le même dual.

Nous verrons plus loin que la notion de dual permet de donner une autre formulation de la planarité (voir théorème 9.2.5 de WHITNEY).

5.6 Croisements, épaisseur et genre d'un graphe

Dans ce paragraphe nous allons étudier trois nouveaux invariants. On entend par **invariant** d'un graphe une quantité ou notion qui reste identique pour chaque classe de graphes isomorphes, comme par exemple le degré moyen, la maille, le nombre d'arêtes, le nombre de composantes connexes, le nombre de faces pour un graphe planaire. . .

5.6.1 Croisements et épaisseur

Le **nombre de croisements** d'un graphe simple $\Gamma = (V; E)$ est le nombre minimum de croisements d'arêtes qui peut survenir dans un dessin de Γ dans le plan (on comptabilise 1 pour chaque couple d'arêtes qui se coupent). On le notera $\text{Cr}(\Gamma)$. Par exemple $\text{Cr}(K_5) = 2$. Ce paramètre permet de « mesurer » le défaut de planarité d'un graphe.

L'**épaisseur** d'un graphe simple connexe $\Gamma = (V; E)$ est le plus petit nombre k de graphes partiels planaires connexes sans arête commune, appelés facteurs d'épaisseur $\Gamma_i = (V; E_i)$, $i = 1, \dots, k$, nécessaires pour construire le graphe : $E = \sqcup_{1 \leq i \leq k} E_i$. On notera ce nombre $\text{Ep}(\Gamma)$. Un exemple est présenté en figure 5.25.

Comme le nombre de croisements, l'épaisseur d'un graphe mesure le défaut de planarité. La proposition 5.6.1 fournit une borne inférieure de l'épaisseur d'un graphe en fonction de ses nombres de sommets et d'arêtes.

Proposition 5.6.1. *Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe simple ayant $n \geq 3$*

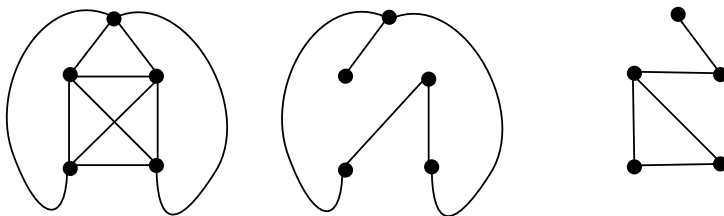


Figure 5.25 – Facteurs d'épaisseur de K_5 . Le graphe complet K_5 (figure de gauche) a deux facteurs d'épaisseur (figures de droite), donc $\text{Ep}(K_5) = 2$.

sommets et m arêtes. Alors l'épaisseur de Γ vérifie :

$$\text{Ep}(\Gamma) \geq \left\lceil \frac{m}{3n-6} \right\rceil.$$

Démonstration. Par la proposition 5.2.14, le nombre d'arêtes de chaque sous-graphe planaire de Γ est au plus $3n-6$. On a donc

$$m \leq (3n-6)\text{Ep}(\Gamma),$$

d'où le résultat. □

Exercice 5.9. Montrer l'inégalité plus forte : $\text{Ep}(\Gamma) \geq \left\lfloor \frac{m+3n-7}{3n-6} \right\rfloor$.

Exercice 5.10. Donner un minorant de l'épaisseur de K_n , $K_{m,m}$, pour $n = 5, 6, 7, 8, 9, 10$ et $m = 3, 4, 5$. Dessiner leurs facteurs d'épaisseur.

Exercice 5.11. Soit $K_{m,n}$ un graphe biparti complet. Montrer que

$$\text{Ep}(K_{m,n}) \geq \left\lceil \frac{mn}{2m+2n-4} \right\rceil.$$

5.6.2 Genre d'un graphe

Bien qu'un graphe ne soit pas forcément planaire, on a l'impression qu'un graphe est localement de dimension 2 ; un sommet avec les débuts d'arêtes adjacentes ressemble à une roue de bicyclette : le moyeu représente le sommet et les rayons représentent les « germes » d'arêtes. Le fait d'être ou non planaire tient à une réalité plus subtile : la nature géométrique « globale » du plan. C'est pourquoi on peut se demander sur quels types de surfaces un graphe peut être plongé.

Précisons d'abord ce qu'est une surface : une **surface topologique** est un espace topologique T dans lequel tout point x a un voisinage ouvert homéomorphe à un disque ouvert du plan $\mathbb{R}^2$. Localement T ressemble à un petit disque $D(a, r)$. Certaines surfaces ne sont pas orientables, comme par exemple le ruban de MÖBIUS. C'est dans un article posthume datant de 1870 que A.F. MÖBIUS a obtenu la classification des surfaces compactes, connexes et orientables. Le cas général des surfaces non orientables n'a été achevé qu'en 1925.

Ces surfaces sont classifiées par un invariant remarquablement simple, le genre, c'est-à-dire le nombre de « trous » ; une surface de genre g , $\mathbb{S}_g$, peut être obtenue à partir de la sphère $\mathbb{S}_0$ de $\mathbb{R}^3$ en ajoutant g anses à cette sphère : on enlève $2g$ petits disques sur la sphère et on recolle deux par deux les petits cercles restant au moyen d'une anse cylindrique (voir figure 5.26).

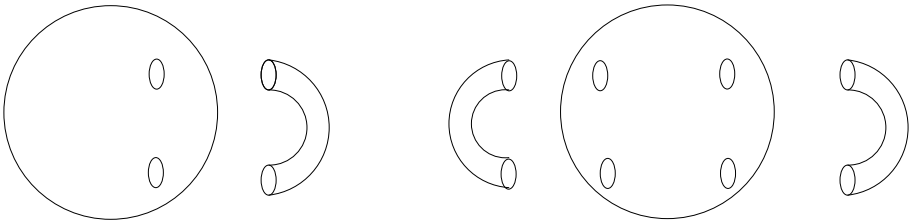


Figure 5.26 – À gauche : fabrication de $\mathbb{S}_1$. À droite : fabrication de $\mathbb{S}_2$.

Théorème 5.6.2 (MÖBIUS, 1870). *Toute surface topologique orientable, compacte et connexe est homéomorphe à une surface $\mathbb{S}_g$, $g \geq 0$.*

Une façon assez voisine de visualiser $\mathbb{S}_g$, $g \geq 1$ est la suivante : on commence par réaliser $\mathbb{S}_1$ comme un tore (chambre à air) : on fait tourner un cercle vertical autour de l'axe des z ; puis on fabrique $\mathbb{S}_2$ en recollant deux tores, etc. (voir figure 5.27).

Le **genre** d'un graphe $\Gamma = (V; E, N)$ est le plus petit entier g tel qu'on puisse plonger Γ dans $\mathbb{S}_g$; notation $\gamma(\Gamma) = g$. La proposition 5.2.17 montre que les graphes planaires sont ceux que l'on peut plonger sur la sphère. Les graphes planaires sont donc exactement les graphes de genre 0. On a aussi $\gamma(K_{3,3}), \gamma(K_5) \geq 1$, car $K_{3,3}$ et K_5 ne sont pas planaires (voir corollaire 5.2.15).

En fait, la présence d'un trou sur le tore donne juste assez d'aisance pour dessiner K_5 et $K_{3,3}$: la figure 5.28 fournit une justification.

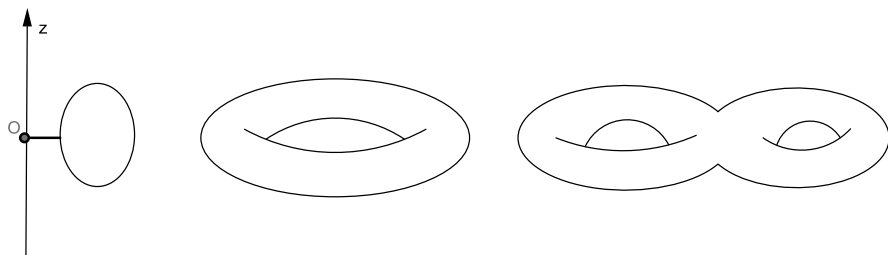
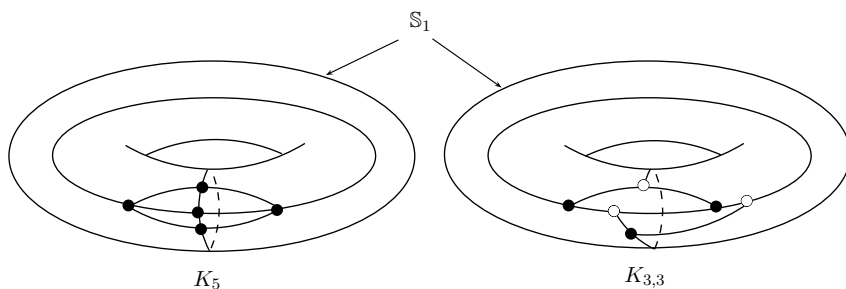


Figure 5.27 – Réalisation du tore. Tore à deux trous.

Figure 5.28 – K_5 et $K_{3,3}$ sont de genre égal à 1.

Proposition 5.6.3. *Le genre d'un graphe est inférieur ou égal au nombre de croisements :*

$$\gamma(\Gamma) \leq \text{Cr}(\Gamma).$$

Démonstration. Supposons que $\text{Cr}(\Gamma) = g$ et dessinons le graphe sur la sphère ; en chaque croisement ajoutons une anse, en remplaçant l'une des arêtes par un pont le long de l'anse ; en fabriquant g anses on supprime tous les croisements. $\square$

Pour un graphe plongé sur $\mathbb{S}_g$ on définit les faces comme étant les composantes connexes de $\mathbb{S}_g \setminus \Gamma$. La formule d'EULER se généralise merveilleusement.

Théorème 5.6.4. *Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe simple, connexe de genre g avec n sommets, m arêtes, plongé sur $\mathbb{S}_g$. On note f le nombre de faces du dessin correspondant.*

Alors f est indépendant du plongement et

$$n - m + f = 2 - 2g.$$

Nous ne donnerons pas la preuve de ce résultat, qui dépasse largement le cadre de ce livre. Pour $g = 0$, on retrouve la formule d'EULER dans le cas des graphes planaires.

On peut vérifier cette formule pour K_5 et $K_{3,3}$ avec la figure 5.28, mais il n'est pas très facile, en général, de compter le nombre de faces ; c'est pourquoi on utilise une troisième réalisation de $\mathbb{S}_g$: pour $g = 1$, cela consiste, à partir d'un carré $ABCD$, à recoller AB à CD en respectant l'orientation des flèches ($\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{DC}$), on obtient un cylindre ; on recolle ensuite $\overrightarrow{BC}$ avec $\overrightarrow{AD}$ de la même façon, on obtient un tore. La figure 5.29 donne une autre vision des plongements de K_5 et $K_{3,3}$ sur le tore.

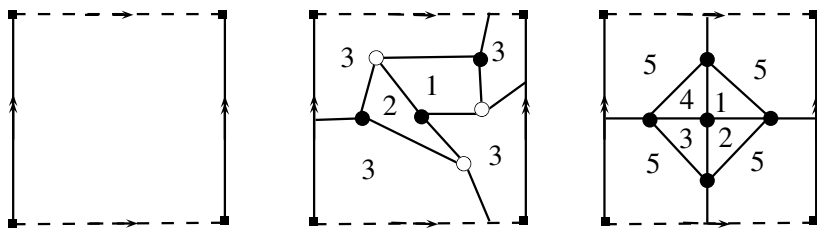


Figure 5.29 – Les graphes $K_{3,3}$ et K_5 sur le tore. À gauche : représentation du tore. La figure du milieu représente $K_{3,3}$ avec ses 3 faces : on voit bien les 8 arêtes adjacentes à la face 3. À droite : K_5 avec ses 5 faces.

Dans le cas d'un graphe simple, il existe une minoration du genre ne faisant intervenir que les nombres de sommets et d'arêtes.

Proposition 5.6.5. *Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe d'ordre fini, simple, connexe, de genre $\gamma(\Gamma) = g$ ayant $n \geq 4$ sommets et m arêtes. Alors*

$$g \geq \left\lceil \frac{m - 3n}{6} + 1 \right\rceil.$$

Démonstration. D'après la proposition 5.2.13, toute face est adjacente à 3 arêtes au moins et d'après la proposition 5.2.6 toute arête est adjacente soit à une soit à deux faces. Par conséquent $3f \leq 2m$. Par le théorème 5.6.4, on obtient $n - m + f = 2 - 2g$, donc $2g = m - n - f \geq m - n - \frac{2}{3}m = \frac{1}{3}m - n + 2$. On a donc $g \geq \frac{m-3n}{6} + 1$. $\square$

Exemple 5.6.6. On connaît le genre de quelques graphes classiques :

$$\begin{aligned} \text{i) } \gamma(K_{m,n}) &= \left\lceil \frac{(m-2)(n-2)}{4} \right\rceil \text{ (RINGEL 1965) : en particulier } \gamma(K_{4,5}) = \\ &2, \gamma(K_{5,5}) = 3. \end{aligned}$$

- ii) $\gamma(K_n) = \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil$ (RINGEL-YOUNGS 1968) : en particulier $\gamma(K_7) = 1$, $\gamma(K_8) = 2$.

On remarquera que la formule d'EULER de la proposition 5.6.4 s'adresse aux graphes de genre exactement égal à g et non pas aux graphes de genre inférieur même si ces graphes peuvent être plongés dans $\mathbb{S}_g$. On peut, par exemple, plonger un cycle de longueur 4, C_4 , sur un tore : on a $n = 4$, $m = 4$; par ailleurs le nombre de faces f sur le tore du dessin correspondant est égal à 1 ou 2 selon le plongement. On voit aussi que $n - m + f$ vaut 1 ou 2 mais que $2 - 2g = 0$. Ainsi il n'existe pas de plongement de C_4 sur le tore tel que la formule de la proposition 5.6.4 soit vraie (avec $g = 1$).

Exemple 5.6.7. Dans la figure 5.31, on a représenté le graphe K_8 sur $\mathbb{S}_2$. La surface $\mathbb{S}_2$ est représentée comme un octogone dont les côtés (orientés) sont recollés par paires en respectant l'orientation. Les arêtes « traversant » les côtés de l'octogone sont étiquetées pour faciliter la lecture. L'arête joignant le sommet x au sommet y est notée xy ou yx .

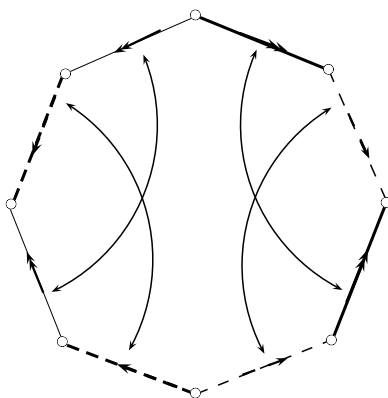
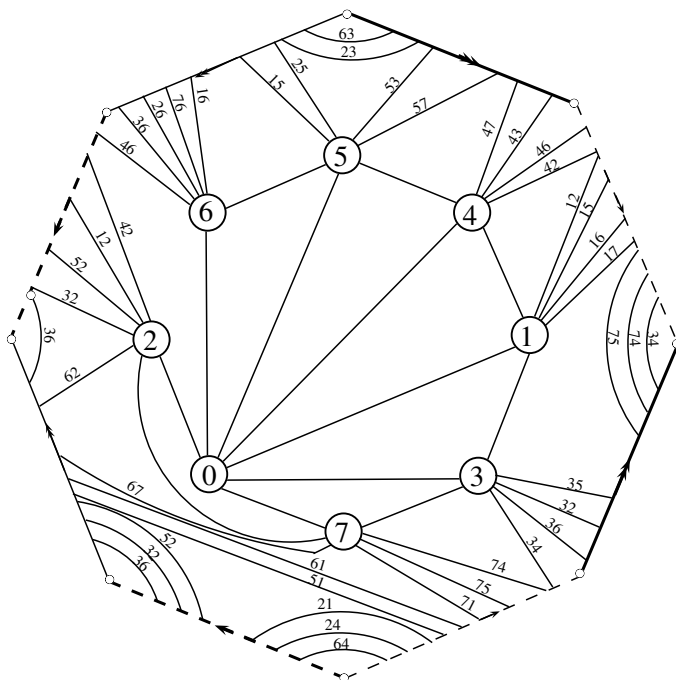


Figure 5.30 – Une représentation de $\mathbb{S}_2$. Les côtés de l'octogone sont repliés les uns sur les autres deux par deux en respectant le sens des flèches.

Remarque 5.6.8. Soit Γ un graphe connexe de genre g_0 . Alors il existe $g \geq g_0$ et un plongement σ de Γ dans $\mathbb{S}_g$ dont le dessin n'a qu'une seule face. En effet, il suffit d'ajouter une anse entre une face et chacune des autres.

Exemple 5.6.9. Le cycle C_n est de genre zéro et possède deux faces dans $\mathbb{S}_0$. On peut le dessiner sur $\mathbb{S}_1$ avec une seule face (exercice!).

Figure 5.31 – Plongement de K_8 dans S_2 .

Exemple 5.6.10. Le graphe $\mathcal{L}$ représenté à la figure 5.32, tel un lorgnon, est de genre nul et possède 3 faces. Il existe un plongement de $\mathcal{L}$ dans S_1 (respectivement dans S_2) avec deux faces (respectivement une face).

5.7 Compléments de topologie et géométrie du plan

5.7.1 Éléments de topologie

Nous donnons ici les éléments essentiels de topologie nécessaires à ce chapitre ; ces notions sont adaptées au cadre particulier des espaces métriques.

Soit (X, d) un espace métrique ; pour $x \in X$ et $r > 0$, on définit :

- $\mathcal{B}(x, r) = \{t \in X : d(x, t) < r\}$, la boule ouverte de centre x et de rayon r ;
- $\mathcal{B}'(x, r) = \{t \in X : d(x, t) \leq r\}$, la boule fermée de centre x et de rayon r ;

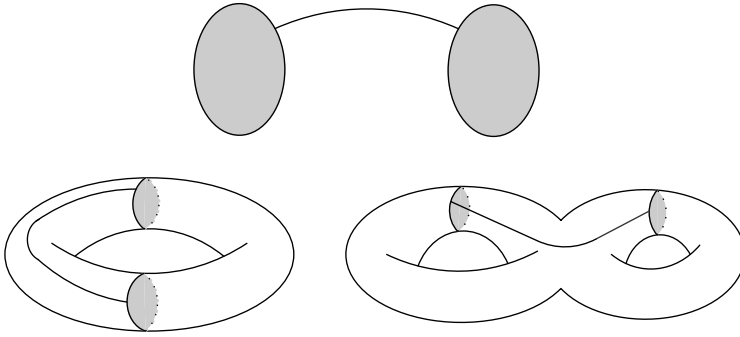


Figure 5.32 – Le lorgnon dans tous ses états.

- $\mathcal{C}(x, r) = \{t \in X : d(x, t) = r\}$, le cercle fermé de centre x et de rayon r .

Une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de points de X est convergente (dans X) s'il existe $x \in X$ (appelé point limite ou limite) tel que

$$\forall r > 0 \quad \exists N > 0 : (n \geq N \implies x_n \in \mathcal{B}(x, r)).$$

Une suite convergente a une limite unique.

Un ouvert est une partie $U \subset X$ vérifiant :

$$\forall x \in X, \exists r > 0 : \mathcal{B}(x, r) \subset U.$$

Pour $A, B \subset X$ et $x \in X$ on définit la distance de x à A par

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y), y \in A\},$$

et la distance de B à A :

$$d(B, A) = \inf\{d(z, A), z \in B\} = \inf\{d(a, b), a \in A, b \in B\}.$$

L'adhérence $\overline{A}$ dans X est l'ensemble des $x \in X$ tels que :

$$\forall r > 0 : \mathcal{B}(x, r) \cap A \neq \emptyset.$$

On a toujours $\overline{\mathcal{B}}(x, r) \subset \mathcal{B}'(x, r)$; lorsque $X = \mathbb{R}^k$, on a en fait l'égalité $\overline{\mathcal{B}}(x, r) = \mathcal{B}'(x, r)$.

A est dite fermée dans X si son complémentaire $X \setminus A$ est un ouvert de X . Alors A est fermée si et seulement si $\overline{A} = A$; X et $\emptyset$ sont fermés.

Lemme 5.7.1.

- i) A est fermé si et seulement si toute suite $(a_n)_{n \geq 0}$ de points de A convergente dans X a sa limite dans A .
- ii) Les singletons $\{x\}$ et plus généralement les parties finies de X sont fermés.
- iii) Toute réunion finie de fermés est fermée.
- iv) Si A est fermé et $x \notin A$, alors $d(x, A) > 0$.

On définit la frontière de A par :

$$\text{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$$

(X, d) est connexe s'il n'existe pas de partition ouverte non triviale de X :

$$X = U \sqcup V, \quad U, V, \text{ ouverts} \implies U = \emptyset \text{ ou } V = \emptyset.$$

Ainsi (X, d) est connexe si et seulement si la seule partie non vide à la fois ouverte et fermée de X est X lui-même. A est une partie connexe de X si (A, d_A) est connexe (d_A est la distance induite par d sur A).

Lemme 5.7.2.

- i) Si $A \subset X$ est connexe, $\overline{A}$ est connexe. Mieux, si A est connexe et $A \subset B \subset \overline{A}$, alors B est connexe.
- ii) **Théorème de passage des douanes :** si un connexe C coupe A et $X \setminus A$ alors C coupe $\text{Fr}(A)$.

Pour $x \in X$ la composante connexe $C(x)$ de x est la plus grande partie connexe de X contenant x . Les $C(x)$ sont des fermés et forment une partition de X : $X = \bigsqcup_{x \in \tilde{X}} C(x)$, où $\tilde{X} \subset X$.

Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, les composantes connexes de U sont des parties ouvertes de U et de $\mathbb{R}^2$ (ce sont aussi des fermés de U !).

Soit $f : (X, d) \longrightarrow (X', d')$. On dit que f est continue en $x \in X$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \left(d(t, x) < \eta \implies d'(f(t), f(x)) < \varepsilon \right).$$

f est continue (sur X) si f est continue en tout $x \in X$; f est un homéomorphisme si f est continue, bijective et si f^{-1} est également continue.

Lemme 5.7.3. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- i) f est continue;

ii) pour tout U ouvert de X' , $f^{-1}(U)$ est ouvert de X .

On munit $\mathbb{R}$ de la distance issue de la valeur absolue $d(x, y) = |x - y|$ et $\mathbb{R}^2$ de la distance associée à la norme euclidienne $d(x, y) = \|x - y\|$, avec $\|(x_1, x_2)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Dans le cas de $\mathbb{R}^2$ la boule $\mathcal{B}(x, r)$ est appelée **disque** et notée $D(x, r)$.

Lemme 5.7.4.

- i) Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles : ouverts, semi-ouverts, fermés, bornés ou non.
- ii) **Théorème de BOLZANO.** Soit $f : (X, d) \rightarrow (X', d')$ continue. Si X est connexe, $f(X)$ est connexe.

Lemme 5.7.5. Soit (X, d) un espace métrique connexe et $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de X (c'est-à-dire chaque $U \in \mathcal{U}$ est ouvert et $X = \cup_{U \in \mathcal{U}} U$). Alors pour tous $x, y \in X$ il existe une chaîne simple finie d'éléments de $\mathcal{U}$ joignant x à y , c'est-à-dire il existe $U_1, \dots, U_m \in \mathcal{U}$ tels que $x \in U_1$ et x n'est dans aucun autre U_i , $y \in U_m$ et y n'est dans aucun autre U_i , et $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ si et seulement si $|i - j| \leq 1$ (chaque U_i ne coupe que le suivant U_{i+1} ou le précédent U_{i-1}).

Démonstration. Soit $x \in X$ fixé et A l'ensemble des points de X (y compris x) pouvant être joints à x par une chaîne simple finie d'éléments de $\mathcal{U}$. On a $A \neq \emptyset$ car $x \in A$.

i) A est ouvert : soit $y \in A$, avec $y \in U_1, \dots, U_m \ni x$.

Si $y \in U_1 \setminus U_2$ alors $U_1, \dots, U_m$ forme une chaîne simple de y à x .

Si $y \in U_1 \cap U_2$ alors $U_2, \dots, U_m$ forme une chaîne simple de y à x .

D'où l'on voit que $U_1 \subset A$: cela montre que A est voisinage de chacun de ses points, donc ouvert.

ii) $X \setminus A$ est ouvert : soit $b \in X \setminus A$; comme $\mathcal{U}$ est un recouvrement, il existe $U \in \mathcal{U}$ contenant b ; nécessairement $U \cap A = \emptyset$. En effet, supposons par l'absurde que $y \in U \cap A$, avec une chaîne simple $y \in U_1, \dots, U_m \ni x$; on fabrique alors une chaîne simple de b à x de la façon suivante. Désignons par k l'indice maximum pour lequel $U \cap U_k \neq \emptyset$:

– si $k = m$: U, U_m ou U ou U_m réalise une chaîne simple de b à x , selon que $b \notin U_m$ et $x \notin U$ ou $x \in U$ ou $b \in U_m$;

– si $k < m$, on a $x \notin U$ (car $x \in U_m$ et $U \cap U_m = \emptyset$) et :

* ou bien $b \notin U_k$ et $U, U_k, \dots, U_m$ est une chaîne simple de b à x ,

* ou bien $b \in U_k$ et $U_k, \dots, U_m$ est une chaîne simple de b à x (dans ce cas $b \notin U_i, k + 1 \leq i \leq m$ car $U \cap U_i = \emptyset$).

Cela montre que $U \cap A = \emptyset$, c'est-à-dire $U \subset X \setminus A$: $X \setminus A$ est voisinage de chacun de ses points, donc ouvert.

A est ainsi une partie ouverte, fermée, non vide de X connexe, donc $A = X$ ce qui achève la preuve². $\square$

Le lemme 5.2.1 est un corollaire immédiat de ce résultat.

Démonstration du lemme 5.2.1. On choisit pour tout $x \in U$ un disque ouvert $D_x = D(x, r_x)$ inclus dans U et on prend $\mathcal{U} = \{D_x, x \in U\}$: c'est un recouvrement ouvert de U , donc d'après le lemme 5.7.5, pour tous $x, y \in U$, il existe une chaîne simple $x \in D_{x_1}, \dots, D_{x_m} \ni y$; on a donc un arc polygonal $P = [[x, x_1]] \cup [[x_1, x_2]] \cup \dots \cup [[x_{m-1}, x_m]] \cup [[x_m, y]] \subset U$. $\square$

L'espace métrique (X, d) est **compact** si de tout recouvrement ouvert on peut extraire un recouvrement fini :

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i, U_i \text{ ouverts} \implies \exists J \subset I, J \text{ fini, tel que } X = \bigcup_{j \in J} U_j.$$

Une partie K de X est dite **compacte** si le sous-espace (K, d_K) est compact (d_K désigne la distance induite sur K par d). On démontre que les parties compactes de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}^2$ sont les parties fermées et bornées (c'est-à-dire qu'il existe $r > 0$ tel que $K \subset D(O, r)$). Notamment le segment $[a, b]$ est un compact de $\mathbb{R}$ et le disque fermé $D'(x, r)$ est un compact de $\mathbb{R}^2$.

Lemme 5.7.6.

- i) **Théorème de WEIERSTRASS.** Soit $f : (X, d) \longrightarrow (X', d')$ continue ; si X est compact, $f(X)$ est compact.
- ii) Une partie compacte est fermée.
- iii) Une réunion finie de parties compactes est compacte.

5.7.2 Preuve du théorème de JORDAN « polygonal »

Théorème 5.2.4. Soit P un arc polygonal du plan $\mathbb{R}^2$; si P est fermé alors l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus P$ a exactement 2 composantes connexes U_1, U_2 dont une seule est non bornée et $\text{Fr}(U_1) = \text{Fr}(U_2) = P$.

2. Voir S. LIPSCHUTZ. *Theory and Problems of General Topology*, Schaum's outline series, Mc Graw-Hill Book Company, 1965.

Démonstration du théorème 5.2.4. Petite promenade topologique sur le sentier des douaniers ou l'art d'esquiver les polygones !

1) On notera aussi P l'application $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui sert à paramétrer l'arc P . Pour chaque $p = P(t) \in P$ il existe un disque ouvert $D_p = D(p, r)$ de rayon $r = r(p)$ assez petit pour que $\overline{D}_p$ ne coupe qu'un petit arc $\{P(t+u) : |u| < \varepsilon(p)\}$ de P et pas d'autres morceaux de P . De plus on peut s'arranger pour que le disque ne contienne pas de point anguleux autre que p (éventuellement) ; selon que p est ou n'est pas anguleux, $D_p \cap P$ est un « diamètre » ou un « angle » (voir figure 5.33). Soient A l'ensemble (fini) des points anguleux de P et Σ l'ensemble (fini) des segments constituant P .

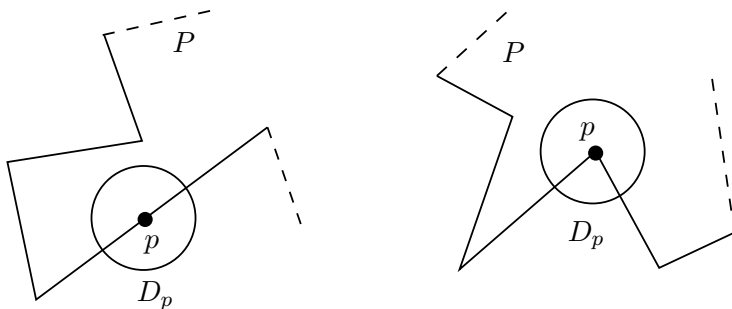


Figure 5.33 – À gauche : D_p , p non anguleux. À droite : D_p , p anguleux.

2) $\mathbb{R}^2 \setminus P$ est un ouvert du plan, car P est une réunion finie de segments, qui sont eux-mêmes fermés ; il n'est pas borné, donc il a au moins une composante connexe non bornée. De plus comme P est compact $\mathbb{R}^2 \setminus P$ a exactement une composante connexe non bornée : en effet P est inclus dans un disque $D = D(0, R)$ pour $R > 0$ assez grand et $\mathbb{R}^2 \setminus D$ est connexe, donc inclus dans une certaine composante connexe de $\mathbb{R}^2 \setminus P$; les autres composantes sont incluses dans D donc bornées.

On fixe un point O dans cette composante connexe, de sorte que O ne soit sur aucune des droites « engendrées » par les segments constituant P : cela est possible car P n'est constitué que d'un nombre fini de segments. De ce fait, pour x dans le plan, $[[x, O]] \cap P$ est fini.

3) Soit $x \notin P$; pour $p \in [[x, O]] \cap P$, le disque D_p privé de la droite (Ox) est constitué de deux demi-disques ouverts U_1 et U_2 . On pose :

- $\tau(p) = 1$ si P coupe U_1 et U_2 ($[[x, O]]$ « traverse » P) ;
- $\tau(p) = 0$ si P ne coupe qu'un seul des demi-disques ouverts U_1, U_2 ($[[x, O]]$ « ne traverse pas » P).

Voir figure 5.34.

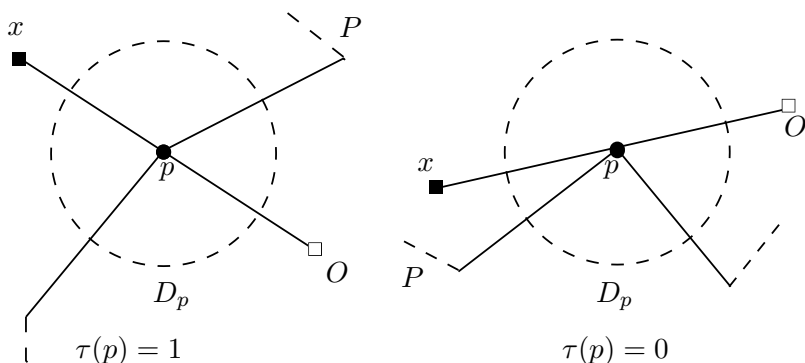


Figure 5.34 – À gauche : $[[x, O]]$ traverse P . À droite : $[[x, O]]$ ne traverse pas P .

La quantité $T(x) = \sum_{p \in [[x, O]]} \tau(p)$ dénombre les « traversées » de P lorsqu'on va de x à O .

4) Soient

$$A = \{x \notin P : T(x) \text{ est pair}\}, \quad B = \{x \notin P : T(x) \text{ est impair}\}.$$

On a $\mathbb{R}^2 \setminus P = A \sqcup B$ et $O \in A$, donc $A \neq \emptyset$.

Il est moins évident que B soit non vide : soit $p \in P$ un point qui réalise le minimum $\min_{x \in P} d(x, O)$.

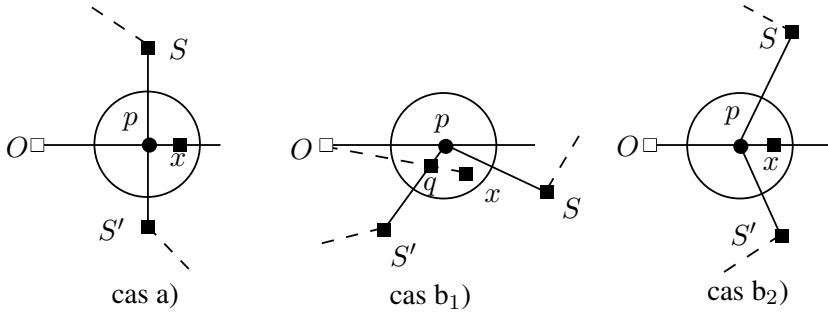
a) si $p \notin \mathbb{A}$, il est sur un seul segment S (perpendiculaire à Op) ; on définit x par $\overrightarrow{Ox} = \lambda \overrightarrow{Op}$ où $\lambda = 1 + \frac{r}{2\|p-O\|}$, où $r = r(p)$ est le nombre défini à l'étape 1), de sorte que $\|x - p\| = \frac{r}{2}$ et $T(x) = \tau(p) = 1$ donc $x \in B$. Voir la figure 5.35.

b) si $p \in \mathbb{A}$, il est sur deux segments S, S' ; il y a deux cas :

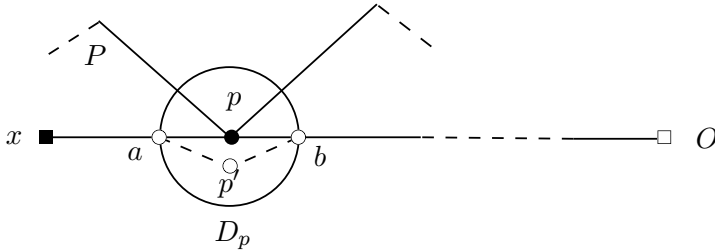
b₁) P ne coupe que U_2 ; en effet soit x dans le secteur angulaire $\widehat{SpS'}$ de D_p : $[[x, O]] \cap P = \{q\}$; $T(x) = \tau(q) = 1$, donc $x \in B$, voir figure 5.35 ;

b₂) P coupe U_1 et U_2 on fait comme dans le cas a), voir figure 5.35.

5) A et B sont ouverts : si on déplace légèrement x , ça ne change pas la parité de $T(x)$: c'est clair lorsque $\tau(p) = 1$ et si $\tau(p) = 0$, le petit


Figure 5.35 – B n'est pas vide.

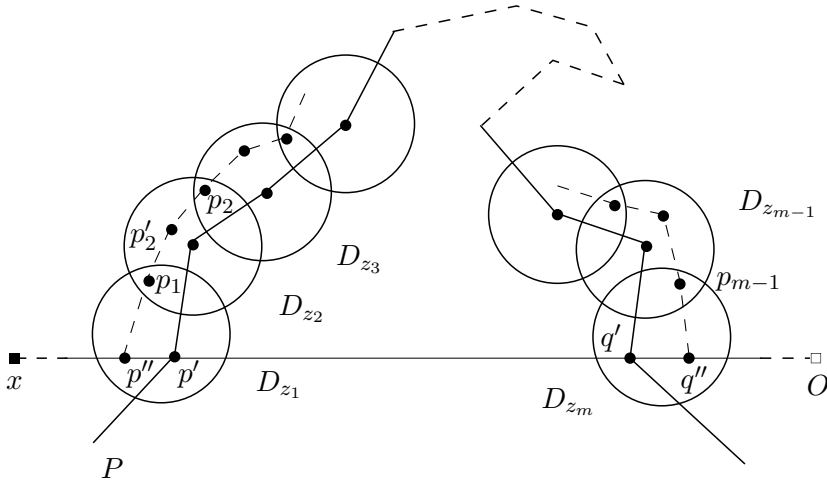
mouvement de x soit élimine p de $[[x, O]] \cap P$, soit remplace p par 2 points p' et p'' , avec $\tau(p') = \tau(p'') = 1$.


Figure 5.36 – L'art d'esquiver un point p tel que $\tau(p) = 0$. On part de x , on arrive à a , on va à p' , puis à b et on continue jusqu'au prochain point à éviter.

Le but est de montrer maintenant que A et B sont connexes : A sera donc la composante connexe non bornée de $\mathbb{R}^2 \setminus P$.

6) A est connexe : pour cela on montre que tout $x \in A$ peut être joint à O par un arc γ dans A . Il suffit pour cela de s'assurer que γ ne coupe pas P ; en effet A et B étant ouverts, on a $\text{Fr}(A), \text{Fr}(B) \subset P$ et si γ rencontrait B , γ étant un connexe de $\mathbb{R}^2$ (comme image continue du connexe $[0, 1]$ de $\mathbb{R}$, voir lemme 5.7.4), il devrait rencontrer $\text{Fr}(A)$ donc P (voir lemme 5.7.2) :

- lorsque $[[x, O]] \cap P = \emptyset$, le segment $[[x, O]]$ convient ;
- sinon, soit p le point de P le plus proche de x : $[[x, p]] \cap P = \emptyset$: si $\tau(p) = 0$ un petit écart, par exemple un écart de $\frac{r(p)}{2}$ dans D_p permet d'éviter p (voir figure 5.36).

Figure 5.37 – L'art d'éviter P entre p' et q' .

On continue ainsi sur le segment $[[x, O]]$ en évitant les points p tels que $\tau(p) = 0$.

- Soit p' le premier point rencontré tel que $\tau(p') = 1$ (si p' n'existait pas, on aurait un arc « presque rectiligne » de x à O évitant P). Il existe alors au moins un autre point q tel que $\tau(q) = 1$ (car $T(x)$ est pair) ; désignons par q' celui qui est le plus proche de O .
- On va maintenant longer P de p' à q' sans la traverser : $p' = P(t_1)$, $q' = P(t_2)$ en supposant $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$; $K = P([t_1, t_2])$ est un connexe du plan car P est continue et $[t_1, t_2]$ est connexe (voir lemme 5.7.4) ; $\mathcal{U} = \{D_z \cap K, z \in K\}$ est un recouvrement ouvert de K ; d'après le lemme 5.7.5, il existe une chaîne simple finie $p' \in D_{z_1}, \dots, D_{z_m} \ni q'$, où chaque disque ne coupe que le suivant ; on s'avance dans $D_{z_1} \cap [[x, O]]$ jusqu'à $p'' \notin P$ avant p' , puis on passe à p_1 dans D_{z_2} via la demi-lentille biconvexe de $D_{z_1} \cap D_{z_2}$; on prend un point p'_2 de D_{z_2} proche du centre de D_{z_2} , on relie par segment ce point à un point p_2 de la demi-lentille biconvexe de $D_{z_2} \cap D_{z_3}$; on termine avec $p_{m-1} \in D_{z_{m-1}} \cap D_{z_m}$ qu'on relie à q'' voisin de q' sur $[[q', O]]$. Se reporter à la figure 5.37. Il se peut que dans ce trajet on rencontre $[[x, O]]$, mais on n'en tient pas compte, l'essentiel étant d'éviter P .
- Il ne reste maintenant entre q' et O que des $q \in [[x, O]] \cap P$ tels que $\tau(q) = 0$ que l'on évite de la même façon que les points p du début.

- On obtient ainsi un arc γ de x à O ne coupant pas P .

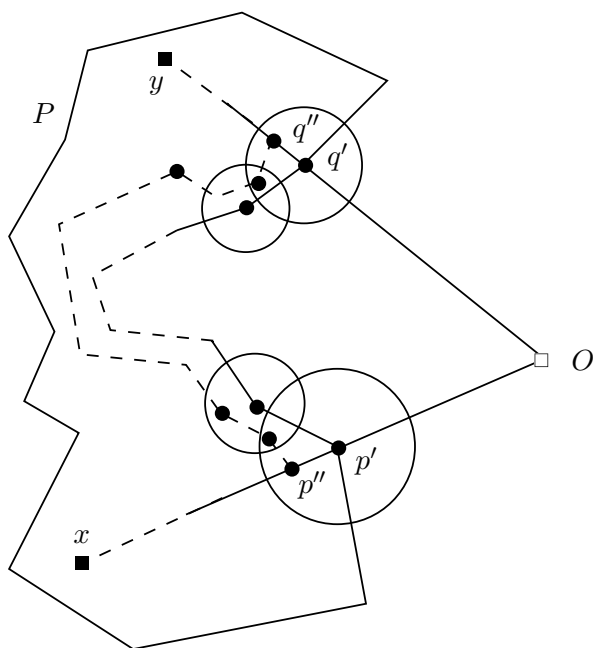


Figure 5.38 – B est connexe.

7) B est connexe. La méthode est la même, mais cette fois on prend deux points x, y de B , qu'il s'agit de relier sans rencontrer P . On part de x en suivant le segment $[[x, O]]$ et on évite les points p de $[[x, O]] \cap P$ tels que $\tau(p) = 0$ comme ci-dessus (voir la figure 5.36) ; soit p' le premier point rencontré tel que $\tau(p') = 1$ (un tel point p' existe car $T(x)$ est impair). De même en partant de y le long de $[[y, O]]$ et évitant les points q de $[[y, O]] \cap P$ tels que $\tau(q) = 0$, on rencontre nécessairement un point q' tel que $\tau(q') = 1$. Comme ci-dessus, grâce à la connexité de l'arc de P joignant p' à q' , on fabrique un arc de p'' , voisin de p' , à q'' voisin de q' qui évite P . La réunion de ces trois arcs donne un arc γ de x à y et ne rencontrant pas P . Se reporter à la figure 5.38.

8) On a vu que $\text{Fr}(A), \text{Fr}(B) \subset P$; si $p \in P$, tout disque $D(p, \varepsilon)$ pour ε assez petit est inclus dans $\overline{D}_p$ (défini au début de cette preuve) et est coupé par P en deux secteurs connexes $U_1, U_2 \subset A \cup B$ (voir figure 5.34) : si, par exemple, $U_1 \subset A$, alors $U_2 \subset B$ (en appliquant le lemme 5.7.2),

donc $p \in \text{Fr}(A) \cap \text{Fr}(B)$; ainsi $\text{Fr}(A) = \text{Fr}(B) = P$. $\square$

Ainsi en revenant à la figure 5.6, pour décider si p est intérieur à la courbe P (c'est-à-dire dans la composante connexe bornée de $\mathbb{R}^2 \setminus P$) ou extérieur (c'est-à-dire dans la composante connexe non bornée), il suffit de fixer O assez loin de P et d'étudier la parité du nombre de fois que le segment $[[p, O]]$ intersecte P .

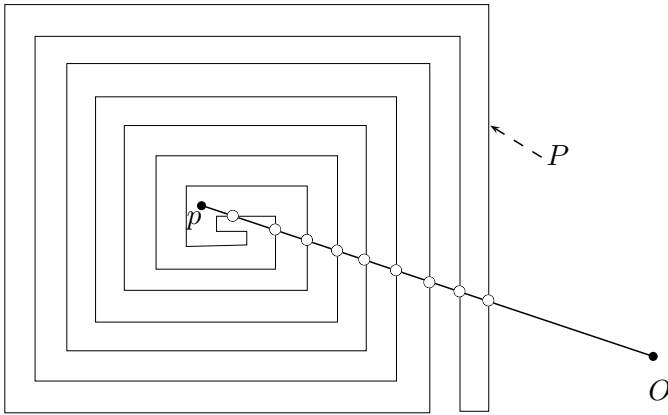
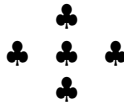


Figure 5.39 – Position du point p par rapport à la ligne fermée en colimaçon P . Le segment $[[O, p]]$ coupe P un nombre impair de fois (9 fois) donc le point p est à l'intérieur de P , c'est-à-dire dans la composante connexe bornée de $\mathbb{R}^2 \setminus P$.



Chapitre 6

Théorie algébrique

Nous avons vu au chapitre 1 qu'à tout graphe on peut associer de manière naturelle plusieurs types de matrices. Ces représentations, bien que peu usitées en pratique, car assez lourdes du point de vue informatique, peuvent avoir un grand intérêt dans l'étude des graphes. La notion de matrice est importante comme concept théorique car elle permet d'utiliser la puissance de l'algèbre linéaire pour l'étude de la structure des graphes. De plus, comme nous le verrons, beaucoup de propriétés intéressantes et utiles en pratique peuvent être abordées de manière algébrique. Dans tout le chapitre les graphes sont supposés d'**ordre fini**.

6.1 Matrices et graphes

Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe avec $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Rappelons que la **matrice d'adjacence** de ce graphe est la matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{Z})$ (ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$) définie par :

$$a_{i,j} = \text{nombre d'arêtes entre les sommets } x_i \text{ et } x_j.$$

Cette matrice est donc symétrique. De même lorsque $\vec{\Gamma} = (V; \vec{E}, N)$ est un digraphe :

$$a_{i,j} = \text{nombre d'arcs de } x_i \text{ à } x_j.$$

Les figures 6.1 et 6.2 illustrent ces notions.

Exemple 6.1.1. La matrice d'adjacence du graphe représenté en fi-

gure 6.1 est donnée par :

$$A_1 = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

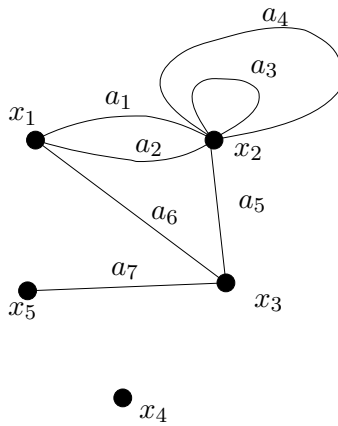
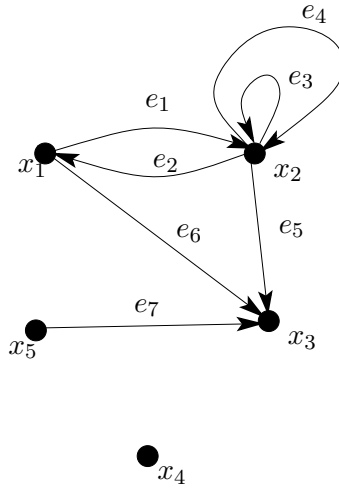


Figure 6.1 – Graphe dont la matrice d'adjacence est la matrice A_1 .

La matrice d'adjacence du graphe orienté représenté en figure 6.2 est donnée par :

$$A_2 = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Proposition 6.1.2. Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe (respectivement $\vec{\Gamma} = (V; \vec{E}, N)$ un digraphe), A sa matrice d'adjacence et $r \geq 1$ un entier. Le coefficient $a_{i,j}^{(r)}$ de la matrice A^r , situé sur la i -ième ligne et la j -ième colonne, est égal au nombre de chaînes de longueur r entre les sommets x_i et x_j (respectivement de chemins de longueur r de x_i à x_j).

Figure 6.2 – Digraphe dont la matrice d'adjacence est A_2 .

Démonstration. Raisonnons par récurrence sur r .

Si $r = 1$, c'est trivial car une chaîne (respectivement un chemin) de longueur 1 est une arête (respectivement un arc). Supposons l'assertion vraie jusqu'à $r - 1$, pour $r \geq 2$. On a

$$a_{i,j}^{(r)} = \sum_{k=1}^n a_{i,k}^{(r-1)} a_{k,j}^{(1)} ;$$

si $a_{k,j}^{(1)} = s$ alors il y a s arêtes (respectivement s arcs) entre x_k et x_j ; or par hypothèse de récurrence, $a_{i,k}^{(r-1)}$ est le nombre de chaînes (respectivement de chemins) de longueur $r - 1$ entre le sommet x_i et le sommet x_k . Ainsi chaque terme $a_{i,k}^{(r-1)} a_{k,j}^{(1)}$, $k = 1, \dots, n$, compte le nombre de chaînes (respectivement le nombre de chemins) de longueur r entre x_i et x_j passant par x_k au $(r - 1)$ -ième « pas »; finalement, en sommant sur tous les $k = 1, \dots, n$, $a_{i,j}^{(r)}$ compte bien le nombre total de chaînes (respectivement de chemins) de longueur r entre x_i et x_j . $\square$

Proposition 6.1.3. Soit $\vec{\Gamma} = (V; \vec{E}, N)$ un digraphe et $1 \leq i \leq |V|$, $1 \leq j \leq |E|$ deux entiers. Alors la somme des coefficients de la i -ième ligne de la matrice d'adjacence de Γ est égale au degré sortant du sommet x_i et la somme des coefficients de la j -ième colonne de la matrice d'adjacence de Γ est égale au degré entrant en x_j .

Démonstration. En effet la somme des coefficients de la i -ième ligne (elle correspond au sommet x_i) indique le nombre d'arcs partant de x_i , c'est donc, par définition, $d^+(x_i)$. La somme des coefficients de la j -ième colonne (elle correspond au sommet x_j) indique le nombre d'arcs ayant comme sommet terminal x_j , c'est donc $d^-(x_j)$. $\square$

La **matrice d'incidence d'un graphe** est la matrice rectangulaire $J = (\alpha_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{Z})$ définie par :

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \text{ est l'un des deux sommets de l'arête } a_j, \\ 2 & \text{si } x_i \text{ est le sommet de la boucle } a_j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit également la **matrice d'incidence d'un digraphe** : c'est la matrice rectangulaire $J = (\alpha_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{Z})$ définie par :

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} -1 & \text{si } x_i \text{ est le sommet initial de l'arc } e_j, \\ 1 & \text{si } x_i \text{ est le sommet terminal de l'arc } e_j, \\ 2 & \text{si } x_i \text{ est le sommet de la boucle } e_j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple 6.1.4. Les deux matrices J_1 et J_2 sont les matrices d'incidences des graphes des figures 6.1 et 6.2 respectivement.

$$J_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$J_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Proposition 6.1.5. Soit $\vec{\Gamma} = (V; \vec{E}, N)$ un digraphe sans boucle. La somme des coefficients de chaque colonne de sa matrice d'incidence est égale à zéro.

Démonstration. Cette preuve est laissée en exercice. $\square$

Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe ou un digraphe, avec $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. La **matrice des degrés** de Γ est la matrice diagonale $D = (d_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{Z})$ définie par

$$d_{i,j} = \begin{cases} d(x_i) & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour un digraphe on a $d(x) = d^+(x) + d^-(x)$.

La proposition suivante relie la matrice d'incidence d'un (di)graphe à sa matrice d'adjacence.

Proposition 6.1.6. *Soit Γ un (di)graphe sans boucle, A sa matrice d'adjacence, J sa matrice d'incidence et D sa matrice des degrés. Alors $J {}^t J \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{Z})$ (${}^t J$ désigne la transposée de J) et*

$$J {}^t J = \begin{cases} A + D & \text{si } \Gamma \text{ est un graphe,} \\ -A + D & \text{si } \Gamma \text{ est un digraphe.} \end{cases}$$

Démonstration.

i) **Cas non orienté** : si $J = (\alpha_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$, on a $J {}^t J = (\beta_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ où

$$\beta_{i,j} = \sum_{k=1}^m \alpha_{i,k} \alpha_{j,k}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

- $\beta_{i,i} = \sum_{1 \leq k \leq m} \alpha_{i,k}^2$ est le nombre d'arêtes incidentes à x_i , c'est donc le degré de x_i . Or $d(x_i) = d_{i,i} = a_{i,i} + d_{i,i}$ car $a_{i,i} = 0$, le graphe étant sans boucle ;
- pour $j \neq i$, on a $d_{i,j} = 0$; on distingue deux cas :
 - * si x_j n'est pas adjacent à x_i , alors $a_{i,j} = 0$ et pour tout $1 \leq k \leq m$, on a soit $\alpha_{i,k} = 0$, soit $\alpha_{j,k} = 0$ (car sinon x_i et x_j seraient incidents à l'arête e_k et seraient donc adjacents) ; donc $\beta_{i,j} = 0 = a_{i,j} + d_{i,j}$;
 - * si x_j est adjacent à x_i alors

$$\alpha_{i,k} \alpha_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } e_k \text{ est incidente à } x_i \text{ et } x_j, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

donc $\beta_{i,j}$ est bien le nombre d'arêtes incidentes à x_i et x_j , qui vaut $a_{i,j} = a_{i,j} + d_{i,j}$.

- ii) **Cas orienté** : la seule différence avec le cas précédent est lorsque x_j est adjacent à x_i : si e_k est orientée de x_i à x_j , on a $\alpha_{i,k}\alpha_{j,k} = (-1) \cdot (+1) = -1$ et si e_k est orientée de x_j à x_i , on a $\alpha_{i,k}\alpha_{j,k} = (+1) \cdot (-1) = -1$, donc $\beta_{i,j}$ est l'opposé du nombre d'arêtes incidentes à x_i et x_j , *i.e.* $\beta_{i,j} = -a_{i,j} = -a_{j,i} + d_{i,j}$, d'où le résultat. $\square$

Exercice 6.1. Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe (simple) et soit J sa matrice d'incidence, $L(\Gamma)$ son line-graphe. On désigne par $A(L(\Gamma))$ la matrice d'adjacence de $L(\Gamma)$ et I la matrice identité d'ordre $m = |E|$. Montrer que

$${}^tJJ = 2I + A(L(\Gamma)).$$

Indication : on remarquera que le produit scalaire de deux vecteurs colonnes de J correspondant à deux arêtes n'est pas nul si et seulement si les deux arêtes correspondantes ont un sommet en commun.

Un digraphe simple $\vec{\Gamma} = (V; \vec{E})$ est une **forêt** (respectivement un **arbre**) si le graphe sous-jacent à $\vec{\Gamma}$ est lui-même une forêt (respectivement un arbre).

Théorème 6.1.7. Soit $\vec{\Gamma} = (V; \vec{E})$ un digraphe simple et J sa matrice d'incidence. Alors le digraphe $\vec{\Gamma}$ est une forêt si et seulement si les vecteurs-colonnes de J sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$.

Démonstration. On pose $m = |\vec{E}|$. Pour chaque arc $e_j = (x, y) \in \vec{E}$, on note $a_j = \{x, y\}$ l'arête sous-jacente dans le graphe sous-jacent de $\vec{\Gamma}$.

- Si le digraphe n'est pas une forêt, le graphe sous-jacent possède un cycle élémentaire :

$$C = (x_1, a_1, x_2, a_2, \dots, x_t, a_t, x_1)$$

de longueur $t \leq m$. Désignons par $c_1, c_2, \dots, c_t$ les vecteurs-colonnes de J correspondant aux arcs ayant $a_1, a_2, \dots, a_t$ pour arêtes sous-jacentes ; ces vecteurs sont liés dans $\mathbb{Z}^m$: pour chaque i , on définit le coefficient d'orientation u_i de l'arête a_i dans le cycle C par

$$u_i = \begin{cases} 1 & \text{si } e_i = (x_i, x_{i+1}), \\ -1 & \text{si } e_i = (x_{i+1}, x_i). \end{cases}$$

Soit $\vec{\Gamma}' = (V'; \vec{E}')$ le sous-digraphe induit par les arcs et les sommets correspondant aux colonnes $c_1, c_2, c_3, \dots, c_t$. Puisque chaque

x_i , $i = 1, \dots, t$, est extrémité de deux arêtes du cycle C , chaque ligne de la matrice d'incidence J' de $\vec{\Gamma}$ contient exactement deux coefficients non nuls. Ces deux coefficients non nuls de la i -ième ligne de la matrice J' (qui correspond au sommet x_i) dépendent des deux coefficients d'orientation des deux seules arêtes incidentes à x_i dans le cycle élémentaire C . Quitte à réordonner les sommets et les arcs de $\vec{\Gamma}$, on peut écrire

$$J' = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & \dots & e_{t-1} & e_t \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{t-1} \\ x_t \end{matrix} & \left(\begin{array}{ccccccc} u_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -u_t \\ -u_1 & u_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -u_2 & u_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -u_3 & u_4 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & u_{t-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & -u_{t-1} & u_t \end{array} \right) \end{matrix}.$$

Puisque $u_i^2 = 1$ pour tout i , on obtient directement $u_1c_1 + u_2c_2 + \dots + u_tc_t = 0$, donc que les vecteurs-colonnes de J' sont liés. Il en est évidemment de même pour ceux de J .

- Réciproquement, supposons que les vecteurs-colonnes de la matrice J soient linéairement dépendants. Il existe des nombres complexes $u_1, u_2, u_3, \dots, u_t$ non tous nuls tels que $u_1c_1 + u_2c_2 + \dots + u_tc_t = 0$. Soit $\vec{\Gamma}' = (V'; \vec{E}')$ le sous-digraphe engendré par les sommets des arcs correspondant aux colonnes $c_1, c_2, c_3, \dots, c_t$ et notons J' sa matrice d'incidence. Comme $u_1c_1 + u_2c_2 + \dots + u_tc_t = 0$ avec $u_i \neq 0$, $i = 1, \dots, t$, chaque ligne de J' admet au moins 2 coefficients non nuls. Par conséquent, aucun sommet dans le graphe sous-jacent à $\vec{\Gamma}'$ n'est de degré 1. Par suite le graphe sous-jacent à $\vec{\Gamma}'$ contient un cycle (voir proposition 2.2.5). Ce cycle est *a fortiori* un cycle du graphe sous-jacent à $\vec{\Gamma}$ et ainsi $\vec{\Gamma}$ n'est pas une forêt. $\square$

Remarque 6.1.8. La dépendance linéaire pour les vecteurs-colonnes de la matrice d'incidence d'un digraphe qui serait une forêt se résume donc à des combinaisons linéaires à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$. On en déduit que l'indépendance linéaire sur $\mathbb{Z}$ des colonnes de la matrice d'incidence équivaut à leur indépendance linéaire sur $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou même sur n'importe quel anneau commutatif unitaire, y compris lorsque sa caractéristique est égale à deux, comme $\mathbb{F}_2$.

Nous allons maintenant montrer que la matrice d'incidence d'un digraphe a une structure très spéciale.

Une matrice M à coefficients dans $\mathbb{Z}$ est dite **totalelement unimodulaire** si toute matrice carrée extraite de M a un déterminant égal à 1, -1 ou 0.

6.1.1 Le cas orienté

Théorème 6.1.9. *La matrice d'incidence d'un digraphe $\vec{\Gamma} = (V; \vec{E}, N)$ sans boucle est totalelement unimodulaire.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur la taille de matrice carrée extraite de J , la matrice d'incidence de $\vec{\Gamma}$. Si $J' = (u)$ est d'ordre 1, alors $\det J' = u$. Comme u est un coefficient de la matrice J , on a $u \in \{-1, 0, 1\}$ car $\vec{\Gamma}$ est sans boucle. Soit J' une matrice carrée d'ordre k avec $k \geq 2$. On distingue trois cas :

- i) si l'un des vecteurs-colonnes de J' est identiquement nul, on a évidemment $\det J' = 0$;
- ii) si tous les vecteurs-colonnes de J' ont deux coefficients non nuls, la matrice J' définit un sous-digraphe $\vec{\Gamma}'$ de $\vec{\Gamma}$ ayant k sommets et k arcs ; le graphe sous-jacent de $\vec{\Gamma}'$ n'est donc pas une forêt (voir corollaire 2.2.3) et par conséquent admet un cycle. Selon le théorème 6.1.7, les vecteurs-colonnes de la matrice J' sont linéairement dépendants d'où $\det J' = 0$;
- iii) s'il existe une colonne de J' avec un coefficient non nul, celui-ci est égal à ± 1 ; en développant le déterminant de J' par rapport à cette colonne, on obtient $\det J' = \pm \det J''$ où J'' est une matrice carrée d'ordre $k - 1$ extraite de J . Par l'hypothèse de récurrence, on a $\det J'' \in \{-1, 0, 1\}$, d'où le résultat. $\square$

Proposition 6.1.10. *Soit $\vec{\Gamma} = (V; \vec{E}, N)$ un digraphe sans boucle ayant n sommets, m arêtes et k composantes connexes. Alors le rang de sa matrice d'incidence J satisfait*

$$\text{rang}(J) = n - k \leq m.$$

Démonstration. On pose $r = \text{rang}(J)$. Alors r est le nombre maximum de vecteurs-colonnes de J linéairement indépendants ; les arêtes du graphe sous-jacent correspondant à ces colonnes définissent un graphe partiel F , qui est une forêt d'après le théorème 6.1.7 ; F possède n sommets, c composantes connexes et r arêtes. On a en outre $c = n - r$ (voir corollaire 2.2.3).

Montrons que $c = k$. On a bien sûr $c \leq k$ car les sommets de F sont ceux de $\vec{\Gamma}$. Si l'on avait $c > k$, il existerait deux composantes connexes de F que l'on pourrait relier par un arc dans $\vec{\Gamma}$. Le digraphe obtenu reste une forêt, donc sa matrice d'incidence a $r + 1$ vecteurs-colonnes linéairement indépendants, contredisant la maximalité de r . On conclut que $m \leq r = n - k$, ce qui correspond au résultat souhaité. $\square$

6.1.2 Le cas non orienté

Théorème 6.1.11. *Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe et J sa matrice d'incidence. La matrice J est une matrice totalement unimodulaire si et seulement si Γ est biparti.*

Démonstration. Supposons que $\Gamma = (V; E)$ soit un graphe biparti : $V = V_1 \sqcup V_2$. Soit J' une matrice carrée d'ordre t extraite de J . Si $t = 1$, on a simplement $J' = (u)$ avec $u \in \{-1, 0, 1\}$ car un graphe biparti n'a pas de boucle. Supposons que $t > 1$; on distingue deux cas :

i) si chaque colonne de J' contient exactement deux coefficients non nuls (donc égaux à 1), les t sommets correspondant aux lignes de J' peuvent être partitionnés en deux ensembles V'_1 et V'_2 tels que $V'_1 \subseteq V_1$ et $V'_2 \subseteq V_2$. Chaque colonne de J' correspond à une arête qui a l'une de ses extrémités dans V'_1 et l'autre dans V'_2 ; donc la somme des vecteurs-lignes correspondant à V'_1 est égale à la somme des vecteurs-lignes correspondant à V'_2 . Ainsi les vecteurs-lignes de J' sont linéairement dépendants, donc $\det J' = 0$.

ii) Supposons maintenant qu'il existe au moins une colonne de J' avec au plus un coefficient non nul, donc égal à 1. On développe le déterminant de J' par rapport à cette colonne. On obtient au signe près le déterminant d'une matrice carrée d'ordre $(t - 1)$, d'où le résultat par l'hypothèse de récurrence.

Réciproquement supposons que Γ ne soit pas biparti. Dans ce cas Γ contient un cycle de longueur impair $2k + 1$ avec $k \geq 1$. Il est aisé de vérifier (laissé en exercice) que le déterminant de la matrice carrée J' correspondant aux $2k + 1$ sommets et aux $2k + 1$ arêtes de ce cycle est égal à 2, ce qui montre que J n'est pas totalement unimodulaire. $\square$

Proposition 6.1.12. *Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe sans boucle ayant n sommets, m arêtes et k composantes connexes. Soit J la matrice d'incidence de Γ alors le rang de J est égal à $n - k \leq m$.*

Exercice 6.2. Faire la preuve de cette proposition.

On appelle **rang** de Γ le nombre entier $\rho(\Gamma) = n - k$, qui est le nombre d'arêtes d'une **forêt de recouvrement** (*i.e.* d'un (di)graphe partiel qui est une forêt); pour les graphes connexes, on retrouve la notion d'arbre de recouvrement évoquée à la proposition 2.2.6. La **nullité** du graphe Γ est le nombre $\nu(\Gamma) = m - n + k$. Remarquons que $\rho(\Gamma) \geq 0$ et $\rho(\Gamma) + \nu(\Gamma) = m$. De plus $\rho(\Gamma) \leq m$ (donc $\nu(\Gamma) \geq 0$) car pour chaque composante connexe C_i le nombre d'arêtes est au moins égal au nombre de sommets moins 1 d'après la proposition 1.4.2.

6.2 Espaces vectoriels et graphes

Dans ce paragraphe nous allons associer aux graphes des espaces vectoriels. Cela nous permettra plus tard d'introduire ou de réintroduire des propriétés des graphes sous une forme algébrique. On suppose les (di)graphes **d'ordre fini et sans boucle**.

6.2.1 Cas des graphes orientés

Soit $\vec{\Gamma} = (V; \vec{E}, N)$ un digraphe. On note δ_{ij} le **symbole de KRONECKER** : $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

Soit $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$; on représente chaque sommet x_i par le vecteur $\xi_i = (\delta_{ij})_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{C}^n$ de telle sorte que $\mathcal{B}_n = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{C}^n$; observons que changer la numérotation des sommets revient à permuter les éléments de $\mathcal{B}_n$; on note $C_0(\vec{\Gamma})$ l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ muni de cette base : on l'appelle **espace des sommets du digraphe** (rappelons que tout espace vectoriel de dimension finie n sur un corps K est isomorphe à K^n).

De même, soit $\vec{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ une numérotation de l'ensemble des arcs; on représente chaque arc e_i par $\varepsilon_i = (\delta_{ij})_{1 \leq j \leq m} \in \mathbb{C}^m$: $\mathcal{B}'_m = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m\}$ est la base canonique de $\mathbb{C}^m$; il est commode d'identifier les arcs e_i aux vecteurs ε_i ; on note $C_1(\vec{\Gamma})$ l'espace vectoriel $\mathbb{C}^m$ muni de cette base : on l'appelle **espace des arcs du digraphe**.

Dans le langage des graphes, la base $\mathcal{B}_n$ de $C_0(\vec{\Gamma})$ est appelée **base standard de l'espace des sommets du digraphe** et la base $\mathcal{B}'_m$ de $C_1(\vec{\Gamma})$ est appelée **base standard de l'espace des arcs du digraphe**.

Soit $\Gamma = (V; E, N)$ le graphe sous-jacent à $\vec{\Gamma}$ et notons $a_i \in E$ l'arête sous-jacente à l'arc $e_i \in \vec{E}$, ainsi $E = \{a_1, \dots, a_m\}$. Soit C un cycle de Γ :

$$C = (x_0, a_0, x_1, a_1, \dots, x_n, a_n, x_0) ;$$

ce cycle possède une « orientation propre » obtenue en considérant l'orientation « cyclique » selon l'ordonnancement $x_0, x_1, \dots, x_n$; un tel cycle sera appelé **cycle orienté** ; il a évidemment deux orientations possibles. Nous verrons dans la suite que la distinction entre ces deux orientations ne sera pas essentielle, bien qu'il soit indispensable d'en fixer une.

On peut maintenant comparer cette orientation à celle des arcs correspondants du digraphe en associant à C le vecteur $\mu_C = (c_1, \dots, c_m) \in C_1(\vec{\Gamma})$ défini par :

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{si } e_i = ((x_i, x_{i+1}), n_i) : e_i \text{ est orientée comme dans } C, \\ -1 & \text{si } e_i = ((x_{i+1}, x_i), n_i) : e_i \text{ est orientée dans le} \\ & \text{sens opposé à celui de } C, \\ 0 & \text{si } e_i \notin C. \end{cases}$$

On pourra considérer μ_C comme une application de $\vec{E}$ dans $\mathbb{C}$ en posant $\mu_C(e_i) = c_i$.

Exemple 6.2.1. Dans le digraphe représenté en figure 6.3, le cycle

$$C = (x_6, a_6, x_3, a_3, x_4, a_4, x_5, a_7, x_6)$$

a pour vecteur associé $\mu_C = (0, 0, -1, -1, 0, 1, -1, 0) \in C_1(\vec{\Gamma})$.

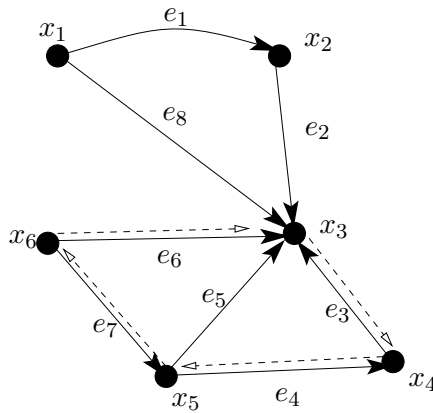


Figure 6.3 – Cycle C dans un digraphe. Le vecteur correspondant est $\mu_C = (0, 0, -1, -1, 0, 1, -1, 0)$.

Il est clair que deux cycles distincts sont associés à deux vecteurs distincts ; de manière plus précise, à deux cycles orientés distincts sont associés deux vecteurs distincts et à deux vecteurs distincts définis comme ci-dessus sont associés deux cycles orientés distincts. On appellera **espace des cycles** le sous-espace vectoriel de $C_1(\vec{\Gamma})$ engendré par l'ensemble $\{\mu_C, C \text{ cycle élémentaire de } \Gamma\}$. On notera $\mathcal{C}$ cet espace.

Soit (V_1, V_2) une partition des sommets du graphe $\vec{\Gamma}$ supposé connexe ; l'ensemble $C^o = C^o(V_1, V_2)$ des arcs entre V_1 et V_2 ou entre V_2 et V_1 est appelé un **cocycle**. De la même manière qu'à un cycle, on peut associer à un cocycle C^o un élément $\mu_{C^o} = (\mu_{C^o}(e_1), \mu_{C^o}(e_2), \dots, \mu_{C^o}(e_m))$ de $C_1(\vec{\Gamma})$ défini par :

$$\mu_{C^o}(e_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } e_i \text{ est orienté de } V_1 \text{ à } V_2, \\ -1 & \text{si } e_i \text{ est orienté de } V_2 \text{ à } V_1, \\ 0 & \text{si } e_i \notin C^o. \end{cases}$$

On appellera **espace des cocycles** le sous-espace vectoriel de $C_1(\Gamma)$ engendré par l'ensemble $\{\mu_{C^o}, C^o \text{ cocycle de } \vec{\Gamma}\}$. On notera $\mathcal{C}^o$ cet espace.

Il existe des cycles remarquables : soit $\vec{\Gamma} = (V; \vec{E}, N)$ un digraphe connexe avec $|V| = n$, $|\vec{E}| = m$ et soit A un arbre de recouvrement du graphe sous-jacent $\Gamma = (V; E, N)$; cet arbre a donc $n - 1$ arêtes (voir théorème 2.2.1) ; notons :

$$R = \{e_i \in \vec{E} \ (1 \leq i \leq m) : a_i \notin A\} ;$$

si $R = \emptyset$, alors Γ est un arbre ; sinon $|R| = m - (n - 1)$: pour chaque $e \in R$ on constate que l'ajout de l'arête a (correspondant à l'arc e) à l'arbre A crée exactement un cycle élémentaire (voir proposition 2.2.6) et appelé **cycle fondamental** ; on note C_e ce cycle fondamental ; on obtient ainsi un vecteur μ_{C_e} ; cela fournit $m - (n - 1)$ cycles fondamentaux attachés à l'arbre de recouvrement A .

Il existe aussi des cocycles remarquables : au lieu d'ajouter une arête à l'arbre A , on en retire une : si on ôte l'arête a de A , on obtient deux composantes connexes, qui fournissent une partition (V_1, V_2) de V , donc un cocycle C_e^o , (e est l'arc de $\vec{\Gamma}$ correspondant à a) appelé **cocycle fondamental** ; cela donne ainsi $n - 1$ cocycles fondamentaux attachés à l'arbre de recouvrement A .

Exemple 6.2.2. Dans le digraphe de la figure 6.4, l'arbre de recouvrement A correspond aux arcs en gras. Le vecteur du cycle $C_{e_{11}}$ est

$\mu_{C_{e_{11}}} = e_{11} - e_4 - e_3 + e_{10}$. Le cocycle associé à l'arc e_4 a pour vecteur $\mu_{C_{e_4}^o} = e_1 + e_4 + e_9 + e_{11} - e_{13}$.

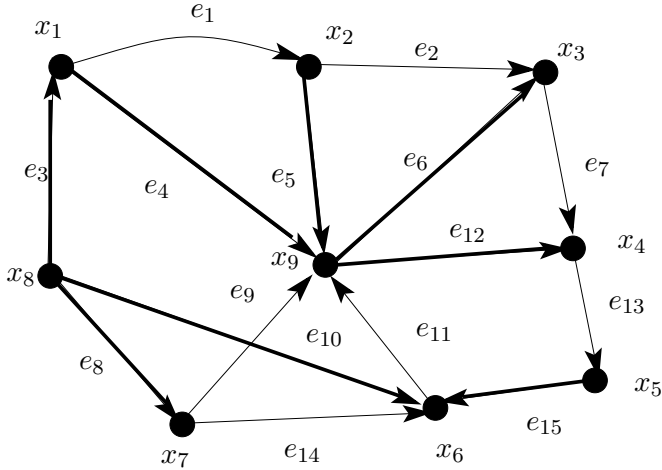


Figure 6.4 – Cycles et cocycles fondamentaux dans un digraphe.

On a le résultat fondamental suivant.

Théorème 6.2.3. Soit $\vec{\Gamma} = (V; \vec{E}, N)$ un digraphe connexe sans boucle et A un arbre de recouvrement du graphe sous-jacent Γ :

- i) L'ensemble des $m - n + 1$ cycles fondamentaux $\{\mu_{C_e}\}$ attachés à l'arbre A forme une base de l'espace des cycles et

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{C} = m - (n - 1).$$

- ii) L'ensemble des $n - 1$ cocycles fondamentaux $\{\mu_{C_e^o}\}$ attachés à A forme une base de l'espace des cocycles et

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{C}^o = n - 1.$$

- iii) Les $\mathbb{C}$ -sous-espaces $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}^o$ sont supplémentaires orthogonaux (pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{C}^n$) dans $C_1(\vec{\Gamma})$.

Démonstration. Soient $(C_i)_{n \leq i \leq m}$ les cycles fondamentaux associés à A . On fixe, quitte à réordonner les arcs,

$$R = \{e_n, \dots, e_m\} = \{e \in \vec{E}, e \text{ n'induit pas une arête de } A\}.$$

Supposons que $\mu = \sum_{i=n}^m \lambda_i \mu_{C_i} = 0_{\mathbb{C}^m}$. On a, d'après notre hypothèse : $\mu(e_j) = 0$, donc $0 = \mu(e_j) = \sum_{i=n}^m \lambda_i \mu_{C_i}(e_j) = \pm \lambda_j$ donc $\lambda_j = 0$. On en conclut que les vecteurs μ_{C_i} , $n \leq i \leq m$, sont $\mathbb{C}$ -linéairement indépendants. De la même manière, on montre que les μ_{C_e} , $e \in A$, forment un système de vecteurs linéairement indépendants. Par conséquent $\dim \mathcal{C} \geq m - n + 1$ (car $|R| = m - n + 1$) et $\dim \mathcal{C}^o \geq n - 1$ (car $|A| = n - 1$).

Montrons maintenant que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}^o$ sont orthogonaux. Soient C un cycle et $C^o = C^o(V_1, V_2)$ un cocycle. Notons :

$$\begin{aligned}\mu_C &= (\mu_C(e_1), \mu_C(e_2), \dots, \mu_C(e_m)) \in \mathbb{C}^m, \\ \mu_{C^o} &= (\mu_{C^o}(e_1), \mu_{C^o}(e_2), \dots, \mu_{C^o}(e_m)) \in \mathbb{C}^m.\end{aligned}$$

Alors $\langle \mu_C, \mu_{C^o} \rangle = \sum_{i=1}^m \mu_C(e_i) \cdot \mu_{C^o}(e_i)$. Si $\mu_C(e_i) \cdot \mu_{C^o}(e_i) \neq 0$, alors on a $e_i \in C \cap C^o$ et ce nombre vaut 1 ou -1 selon que l'arc e_i va de V_1 à V_2 ou de V_2 à V_1 ; ainsi le nombre d'arcs appartenant à $C \cap C^o$ est pair (C étant un cycle, chaque fois qu'on passe de V_1 à V_2 il faut passer de V_2 à V_1), par conséquent $\langle \mu_C, \mu_{C^o} \rangle$ est simplement le nombre d'arcs dans C passant de V_1 à V_2 moins le nombre d'arcs passant de V_2 à V_1 : d'où $\langle \mu_C, \mu_{C^o} \rangle = 0$.

Ainsi

$$\dim \mathcal{C} + \dim \mathcal{C}^o \leq m = m - n + 1 + n - 1.$$

D'où, d'après ci-dessus, $\dim \mathcal{C} = m - n + 1$ et $\dim \mathcal{C}^o = n - 1$. On en déduit que $\{\mu_{C_e}, e \notin A\}$ forme une base de l'espace des cycles et que $\{\mu_{C_e}, e \in A\}$ forme une base de l'espace des cocycles. $\square$

Corollaire 6.2.4. Soit $\vec{\Gamma} = (V; \vec{E}, N)$ un digraphe sans boucle ayant k composantes connexes. Alors

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{C} = \mu(\Gamma) = m - n + k, \quad \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{C}^o = \rho(\Gamma) = n - k.$$

Exercice 6.3. Démontrer le corollaire 6.2.4.

6.2.2 Cas des graphes non orientés

On peut développer une théorie analogue pour les graphes non orientés : il suffit de supprimer les signes ; mais comme les coefficients 1 et -1 ne se compensent plus, on remplace le corps $\mathbb{C}$ par le corps à deux éléments $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe sans boucle, $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$; on représente chaque sommet x_i par le vecteur $\xi_i = (\delta_{ij})_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{F}_2^n$

en utilisant encore les symboles de KRONECKER δ_{ij} , de sorte que $\mathcal{B}_n = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{F}_2^n$; changer la numérotation des sommets revient à permuter les éléments de $\mathcal{B}_n$; on note $C_0(\Gamma)$ ce $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel $\mathbb{F}_2^n$, appelé **espace des sommets du graphe**.

De même soit $E = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ une numérotation des arêtes; on représente chaque arête a_i par $\varepsilon_i = (\delta_{ij})_{1 \leq j \leq m} \in \mathbb{F}_2^m$; alors $\mathcal{B}'_m = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m\}$ est la base canonique de $\mathbb{F}_2^m$; il est commode d'identifier a_i à ε_i ; on note $C_1(\Gamma)$ ce $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel, appelé **espace des arêtes du graphe**.

Le vecteur $\mu_C = (c_1, c_2, \dots, c_m) \in C_1(\Gamma)$ associé au cycle :

$$C = (x_0, a_0, x_1, a_1, \dots, x_n, a_n, x_0)$$

est défini par

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{si } a_i \in C, \\ 0 & \text{si } a_i \notin C. \end{cases}$$

Il est clair qu'à deux cycles distincts sont associés deux vecteurs distincts. On appelle **espace des cycles** le $\mathbb{F}_2$ -sous-espace vectoriel de $C_1(\Gamma)$ engendré par l'ensemble $\{\mu_C, C \text{ cycle de } \Gamma\}$. On notera $\mathcal{C}$ cet espace.

Exercice 6.4. Pour tout cycle C , on désigne par E_C l'ensemble des arêtes de C . Soient C et C' deux cycles ayant une seule arête commune a . Montrer que le vecteur $\mu_C + \mu_{C'}$ est le vecteur associé à un cycle C'' . Que se passe-t-il lorsque C et C' ont exactement deux arêtes communes?

Exercice 6.5.

- i) Montrer que dans un graphe d'ordre fini tout cycle est réunion arête-disjointe de cycles élémentaires (raisonner par récurrence).
- ii) En déduire que l'espace des cycles est engendré par les cycles élémentaires.

On appelle **cycle algébrique** un élément μ de $C_1(\Gamma)$.

Si (V_1, V_2) est une partition des sommets d'un graphe Γ connexe, l'ensemble $C^o = C^o(V_1, V_2)$ des arêtes entre V_1 et V_2 est appelé un **cocycle**, auquel on associe un vecteur μ_{C^o} de $C_1(\Gamma)$:

$$\mu_{C^o}(a_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } a_i \in C^o, \\ 0 & \text{si } a_i \notin C^o. \end{cases}$$

On appelle **espace des cocycles** et on note $\mathcal{C}^o$, le $\mathbb{F}_2$ -sous-espace vectoriel de $C_1(\Gamma)$ engendré par les vecteurs μ_{C^o} , avec C^o cocycle de Γ .

Lorsque A est un arbre de recouvrement de Γ , on peut définir de la même manière que pour les digraphes des cycles et des cocycles fondamentaux attachés à cet arbre, notés respectivement C_a pour les arêtes a qui ne sont pas sur l'arbre A et C_a^o pour les a qui sont sur A : C_a est l'unique cycle induit en ajoutant l'arête a à l'arbre A et C_a^o est le cocycle relatif à la partition de $A \setminus a$ en deux composantes connexes obtenues en retirant à A l'arête a .

Théorème 6.2.5. *Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe connexe sans boucle et A un arbre de recouvrement de Γ . Alors*

- i) *L'ensemble $\{\mu_{C_a}, a \in E \setminus A\}$ forme une base du $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel des cycles et*

$$\dim_{\mathbb{F}_2} \mathcal{C} = m - (n - 1).$$

- ii) *L'ensemble $\{\mu_{C_a^o}, a \in A\}$ forme une base du $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel des cocycles et*

$$\dim_{\mathbb{F}_2} \mathcal{C}^o = n - 1.$$

- iii) *Les espaces $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}^o$ sont supplémentaires dans le $\mathbb{F}_2$ -espace vectoriel $\mathcal{C}_1(\Gamma)$ et orthogonaux pour le produit scalaire canonique.*

Le nombre $m - n + 1$ est par définition le **nombre cyclomatique** du graphe Γ .

Exercice 6.6. Rédiger la preuve du théorème 6.2.5.

Dans l'exercice suivant on se référera à la remarque 6.3.2

Exercice 6.7.

- i) Montrer que $\mathcal{C}^o = \mathcal{C}^\perp$, orthogonal de $\mathcal{C}$ pour le produit scalaire.
- ii) Soit φ_{tj} l'application linéaire associée à tj . Montrer que $\text{Im } \varphi_{tj} = \mathcal{C}^o$.
- iii) Est-ce vrai dans le cas orienté ?

6.3 Circulation et algèbre linéaire

Nous avons introduit au chapitre 4 la notion de flot dans un réseau associé à un digraphe $\vec{\Gamma} = (V; \vec{E}, N)$. Dans un réseau, il y a nécessité de considérer deux sommets particuliers s et p , la source et le puits. Cependant il est parfois commode de ne pas fixer une source et un puits : on obtient ainsi la notion voisine de circulation.

Une **circulation** dans un digraphe $\vec{\Gamma} = (V; \vec{E}, N)$ est une application $f : \vec{E} \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant :

$$\forall x \in V, \quad \sum_{\substack{e \in \vec{E} \\ i(e)=x}} f(e) = \sum_{\substack{e \in \vec{E} \\ t(e)=x}} f(e).$$

Avec les conventions ci-dessus ($\vec{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, l'arc e_j étant identifié au j -ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^m$), on peut représenter f sous la forme de vecteur-colonne de $\mathbb{C}^m$:

$$\tilde{f} = {}^t(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_m)).$$

Proposition 6.3.1. *Soit $\vec{\Gamma} = (V; \vec{E}, N)$ un digraphe sans boucle et J sa matrice d'incidence. Une application $f : \vec{E} \rightarrow \mathbb{C}$ est une circulation si et seulement si*

$$J\tilde{f} = 0_{\mathbb{C}^n};$$

Démonstration. Soit $f : \vec{E} \rightarrow \mathbb{C}$. La k -ième composante de $J\tilde{f}$ s'écrit

$$(J\tilde{f})_k = \sum_{j=1}^m \alpha_{k,j} f(e_j).$$

Or à k fixé, $\alpha_{k,j} = 1, -1$ ou 0 selon que $t(e_j) = x_k$ (i.e. x_k est le sommet terminal de l'arc e_j), $i(e_j) = x_k$ (i.e. x_k est le sommet initial de l'arc e_j) ou que e_j n'est pas incidente à x_k ; donc

$$(J\tilde{f})_k = \sum_{\substack{j=1 \\ t(e_j)=x_k}}^m f(e_j) - \sum_{\substack{j=1 \\ i(e_j)=x_k}}^m f(e_j),$$

donc, si f est une circulation, on a

$$(J\tilde{f})_k = \sum_{t(e_j)=x_k} f(e_j) - \sum_{i(e_j)=x_k} f(e_j) = 0,$$

d'où $J\tilde{f} = 0_{\mathbb{C}^n}$.

Réciproquement, supposons que $J\tilde{f} = 0_{\mathbb{C}^n}$. Alors pour tout $k = 1, \dots, n$,

$$0 = (J\tilde{f})_k = \sum_{j=1}^m \alpha_{k,j} f(e_j) = \sum_{t(e_j)=x_k} f(e_j) - \sum_{i(e_j)=x_k} f(e_j)$$

Donc $\sum_{i(e)=x} f(e) = \sum_{t(e)=x} f(e)$ pour tout $x \in V$. Ainsi f est une circulation. $\square$

Remarque 6.3.2. À la matrice J correspond une application linéaire $\varphi_J : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^n$: la j -ième colonne de J est constituée des composantes de $\varphi_J(e_j)$ dans la base des ξ_k , $1 \leq k \leq n$; dans cette colonne, on trouve le coefficient 1 si $t(e_j) = x_k$, -1 si $i(e_j) = x_k$ et 0 ailleurs. Ainsi $J\tilde{f} = 0_{\mathbb{C}^n}$ signifie que $\tilde{f} \in \text{Ker } \varphi_J$; la proposition 6.3.1 montre que $\text{Ker } \varphi_J$ est égal à $\tilde{\mathcal{C}}$, $\tilde{\mathcal{C}}$ désignant l'ensemble des circulations de $\vec{\Gamma}$; cet ensemble $\tilde{\mathcal{C}}$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^m$. De plus l'isomorphisme $\mathbb{C}^m / \text{Ker } \varphi_J \cong \text{Im } \varphi_J$ donne, en passant aux dimensions, $m - \dim \tilde{\mathcal{C}} = \dim \text{Im } \varphi_J = \text{rang}(J) = n - k$ (voir proposition 6.1.10), qui vaut $m - \dim \mathcal{C}$ par le corollaire 6.2.4. Ainsi $\dim \tilde{\mathcal{C}} = \dim \mathcal{C}$. On a en fait $\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C}$, comme l'affirme le théorème suivant.

Théorème 6.3.3. Soit $\vec{\Gamma} = (V; \vec{E}, N)$ un digraphe sans boucle. L'espace des circulations est égal à l'espace des cycles : $\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C}$.

Démonstration. Compte tenu de la remarque 6.3.2, il suffit de montrer que $\mathcal{C} \subset \tilde{\mathcal{C}}$ (ou l'inverse). Soit

$$C = (x_0, a_0, x_1, a_1, \dots, x_n, a_n, x_0),$$

un cycle dans le graphe sous-jacent, associé au vecteur $\mu_C = (c_1, \dots, c_m)$ de $\mathcal{C}$. Calculons $J\mu_C$: la k -ième ligne de la matrice J est associée au sommet x_k . Si ce sommet n'est pas sur le cycle C , alors $(J\mu_C)_k = 0$; sinon x_k est incident à exactement deux arêtes sur C , arêtes qui correspondent à deux arcs. En étudiant l'orientation de ces arcs et l'incidence de ces arcs en x_k (selon que x_k est l'extrémité initiale ou terminale de ces arcs), on trouve dans tous les cas $(J\mu_C)_k = 0$. Ainsi μ_C correspond à une circulation $f : f(e_j) = c_j$ pour tout $j = 1, \dots, m$. $\square$

Corollaire 6.3.4.

- i) Le noyau de l'application $\varphi_J : C_1(\vec{\Gamma}) \longrightarrow C_0(\vec{\Gamma})$ est $\text{Ker } \varphi_J = \mathcal{C}$.
- ii) Si le graphe sous-jacent à $\vec{\Gamma}$ est un arbre, alors $\tilde{\mathcal{C}} = \{0_{\mathbb{C}^m}\}$.

Démonstration. i) est clair. Pour ii) on note que si Γ est un arbre, on a $\mathcal{C} = \{0_{\mathbb{C}^m}\}$ donc $\tilde{\mathcal{C}} = \{0_{\mathbb{C}^m}\}$. $\square$

Le dernier résultat de ce paragraphe montre que les arcs d'un digraphe peuvent être partitionnés de telle sorte qu'ils appartiennent soit à un cycle soit à un cocycle. On établit d'abord un lemme.

Lemme 6.3.5 (lemme des arcs coloriés, MINTY, 1960). Soit $\vec{\Gamma} = (V; \vec{E}, N)$ un digraphe sans boucle dont les arcs sont coloriés de manière arbitraire en noir, en rouge ou en vert. Soit e_1 un arc ayant la couleur noire. Alors une et une seule des deux assertions suivantes est satisfaite :

- (1) Il existe un cycle élémentaire (orienté) C contenant e_1 dont tous les arcs sont soit noirs soit rouges et tel que tous les arcs noirs sont orientés dans le même sens.
- (2) Il existe un cocycle C^o contenant e_1 dont tous les arcs sont soit noirs soit verts et tel que tous les arcs noirs sont orientés dans le même sens.

Démonstration. Soit $e_1 = ((x_1, y_1), n_1)$. Nous allons marquer tous les sommets de proche en proche en partant du sommet y_1 :

- (a) on marque y_1 ;
- (b) si le sommet u est déjà marqué et si v est un sommet non encore marqué, on marque v si et seulement si :
 - ou bien il existe un arc noir de u à v ,
 - ou bien il existe un arc rouge de u à v ou de v à u .

Le processus s'arrête quand plus aucun sommet ne peut être marqué grâce à la règle (b).

On distingue deux cas :

- i) Supposons avoir marqué le sommet x_1 . Alors la règle (b) implique qu'il existe de y_1 à x_1 une chaîne (orientée) élémentaire qui ne contient que des arcs rouges ou noirs dont tous les arcs noirs sont orientés dans le même sens. En ajoutant l'arc e_1 , on obtient un cycle dont tous les arcs sont soit noirs soit rouges et tel que tous les arcs noirs sont orientés dans le même sens ; donc (1) est vérifié.
- ii) Supposons que le sommet x_1 n'a pas été marqué par la procédure. Notons X l'ensemble des sommets qui ont été marqués par notre procédé ; on a $y_1 \in X$ et $x_1 \in V \setminus X$. Le cocycle C^o associé à cette partition ne contient aucun arc noir ayant comme sommet initial un sommet de X et C^o ne contient pas d'arc rouge. Par conséquent C^o est un cocycle dont tous les arcs noirs sont orientés dans le même sens (vers X) et dont les autres arcs sont colorés en vert ; ainsi C^o vérifie (2).

Montrons maintenant que (1) et (2) sont exclusifs : supposons qu'il y ait un cycle C vérifiant (1) et un cocycle $C^o = C^o(X, V \setminus X)$ vérifiant (2). On a alors $e_1 \in C \cap C^o$ et donc C^o doit contenir un autre arc de C car $y_1 \in X$ et $x_1 \in V \setminus X$; notons e_2 cet arc ; il ne peut pas être rouge d'après (2) ; supposons que e_2 soit noir, alors e_2 a la même direction que

e_1 dans C^o , mais alors e_2 est orienté dans le sens opposé à e_1 , ce qui est impossible d'après (1); donc e_2 est vert, ce qui est impossible car $e_2 \in C$: contradiction. $\square$

Un cocycle est un **cocircuit** si tous ses arcs sont orientés dans le même sens.

Corollaire 6.3.6. *Toute arc d'un digraphe appartient soit à un circuit soit à un cocircuit.*

Démonstration. On colorie tous les arcs en noir et on applique le lemme 6.3.5. $\square$

6.4 Graphes planaires et algèbre linéaire

Nous avons introduit la planarité des graphes au chapitre 5. Les principaux outils utilisés dans cette étude sont la topologie et la combinatoire. Nous pouvons maintenant aborder cette notion en utilisant l'algèbre linéaire.

Un cocycle non vide $C^o = C^o(V_1, V_2)$ est dit **minimal** si C^o ne contient pas de sous-ensemble propre non vide qui définisse un cocycle. Une illustration de ce concept est présentée en figure 6.5.

Exercice 6.8. Montrer que dans un graphe connexe $C^o(V_1, V_2)$ est minimal si et seulement si V_1 et V_2 sont connexes.

Par exemple, les C_e^o associés à un arbre de recouvrement A sont des cocycles minimaux; d'après le théorème 6.2.3 et le théorème 6.2.5 ces cocycles minimaux engendrent l'espace des cocycles C^o .

Exemple 6.4.1. La figure 6.5 représente deux fois le même graphe selon les dessins A et B . Dans A , le cocycle $C^o(X, \overline{X})$ formé des arêtes a_1, a_2, a_3 n'est pas minimal car dans la figure de droite on obtient un cocycle $C^o(Y, \overline{Y})$ formé par a_1, a_2 ; celui-ci est inclus dans a_1, a_2, a_3 .

Exercice 6.9. Montrer que si $\kappa(\Gamma) \geq 2$, alors pour tout $x \in V$ l'ensemble $E(x)$ des arêtes adjacentes à x est un cocycle minimal (les graphes sont ici supposés sans boucle). Comparer cette situation à celle de la figure 6.5.

Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe connexe planaire plongé dans $\mathbb{R}^2$ et $\Gamma^* = (V^*; E^*, N^*)$ son dual topologique (voir § 5.5); soit C un cycle élémentaire de Γ , c'est donc une courbe de JORDAN (c'est-à-dire une courbe simple fermée) qui partage le plan en deux composantes connexes; les

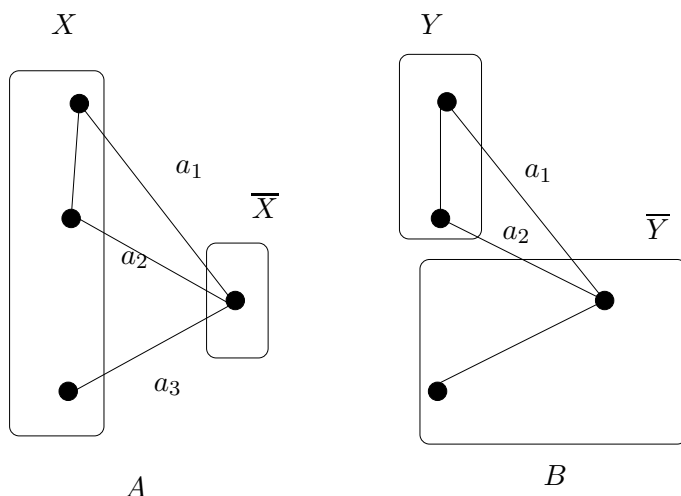


Figure 6.5 – Cocycle minimal dans un graphe.

faces intérieures à C forment une partie V_1 de Γ^* , les faces extérieures correspondent à V_2 ; par conséquent, au cycle C il correspond le cocycle minimal $\mathcal{C}^o(V_1, V_2)$ de Γ^* ; maintenant soit C un ensemble d'arêtes de Γ dont aucun sous-ensemble ne forme un cycle : par conséquent, le graphe induit par C est une forêt et ne possède donc qu'une seule face (voir proposition 5.2.8). Donc chaque paire de sommets de Γ^* (c'est-à-dire chaque paire de faces de Γ) peut être reliée par une chaîne dont aucune arête (dans Γ^*) ne correspond à une arête de C . On en conclut qu'aucun sous-ensemble (non vide) d'arêtes de C ne correspond à un cocycle minimal de Γ^* .

On vient de démontrer la proposition suivante.

Proposition 6.4.2. *Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe connexe planaire plongé dans $\mathbb{R}^2$ et $\Gamma^* = (V^*; E^*, N^*)$ son dual topologique. Alors un ensemble d'arêtes C forme un cycle de Γ si et seulement si l'ensemble d'arêtes C^* de Γ^* correspondant aux arêtes de C forme un cocycle.*

Ainsi en identifiant les arêtes de Γ et de Γ^* , comme $\mathcal{C}$ est engendré par ces cycles et comme $\mathcal{C}^o(\Gamma^*)$ est engendré par les cocycles minimaux, on a : $\mathcal{C}^o(\Gamma^*) = \mathcal{C}(\Gamma)$.

La correspondance ci-dessus est même plus précise car les cycles élémentaires de Γ sont exactement les cocycles minimaux de Γ^* . Cela suggère la définition suivante : soit $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe connexe sans

boucle on dira que $\Gamma^c = (V^c, E^c, N^c)$ est un **dual combinatoire** de Γ s'il existe une bijection $f : E \longrightarrow E^c$ telle que

$$f(\mathcal{C}(\Gamma)) = \mathcal{C}^o(\Gamma^c),$$

cette égalité étant justifiée par le fait qu'un cycle élémentaire C est entièrement déterminé par l'ensemble de ses arêtes $E(C)$. Ainsi lorsque Γ est planaire, Γ^* est dual combinatoire de Γ .

Le dual combinatoire possède les propriétés suivantes.

Lemme 6.4.3.

- i) $|E^c| = |E|$, $|V^c| = |E| - |V| + 2$;
- ii) $\delta(\Gamma^c) \geq \mu(\Gamma)$;
- iii) *tout graphe partiel de Γ a un dual combinatoire*;
- iv) *toute subdivision de Γ a un dual combinatoire*;
- v) *toute contraction de Γ a un dual combinatoire*.

Démonstration.

- i) Avec le théorème 6.2.5, $\dim \mathcal{C}^o(\Gamma^c) = |V^c| - 1 = \dim \mathcal{C}(\Gamma) = |E| - |V| + 1$.
- ii) Soit $x \in V(\Gamma^c)$ de degré $\delta(\Gamma^c)$; l'ensemble des arêtes adjacentes à x est un cocycle, auquel correspond un cycle de Γ à $\delta(\Gamma^c)$ arêtes, donc $\mu(\Gamma) \leq \delta(\Gamma^c)$.
- iii) Si on enlève l'arête e à Γ et qu'on contracte l'arête $f(e)$ de Γ^c , f fournit une bijection entre $E(\Gamma \setminus e)$ et $E(\Gamma^c/f(e))$ par laquelle les cycles de $\Gamma \setminus e$ s'envoient sur les cycles de $\Gamma^c/f(e)$ ($\dim \mathcal{C}(\Gamma \setminus e) = \dim \mathcal{C}(\Gamma) - 1$, $\dim \mathcal{C}^o(\Gamma^c/f(e)) = |V^c| - 2 = \dim \mathcal{C}^o(\Gamma^c) - 1$).
- iv) Si on ajoute un sommet au milieu de l'arête e , cela remplace e par 2 arêtes e', e'' ; dans Γ^c on double l'arête $f(e)$ de sorte que si Γ_+ et Γ_+^c sont les graphes ainsi obtenus, on a $\dim \mathcal{C}(\Gamma_+) = \dim \mathcal{C}(\Gamma)$, $\dim \mathcal{C}^o(\Gamma_+^c) = \dim \mathcal{C}^o(\Gamma)$; et on déduit de f une bijection évidente $E(\Gamma_+) \longrightarrow E(\Gamma_+^c)$ envoyant cycles sur cocycles. D'ailleurs, on pourrait montrer que le doublement d'une arête e dans Γ correspond à une subdivision dans Γ^c .
- v) Si on contracte e dans Γ et qu'on supprime $f(e)$ à Γ^c , f donne encore une bijection entre $E(\Gamma/e)$ et $E(\Gamma^c \setminus f(e))$ par laquelle cycles de Γ/e s'envoient sur cocycles de $\Gamma^c \setminus f(e)$ ($\dim \mathcal{C}(\Gamma/e) = \dim \mathcal{C}(\Gamma)$, $\dim \mathcal{C}^o(\Gamma^c \setminus f(e)) = \dim \mathcal{C}^o(\Gamma^c)$). $\square$

Voici maintenant le principal résultat de ce paragraphe, une caractérisation algébrico-combinatoire de la planarité.

Théorème 6.4.4 (WHITNEY, 1933). *Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe connexe sans boucle. Ce graphe est planaire si et seulement s'il a un dual combinatoire.*

Démonstration. Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe connexe sans boucle. Si Γ est planaire, nous avons vu que Γ^* est un dual combinatoire de Γ .

Réciproquement, soit Γ^c un dual combinatoire de Γ ; supposons que Γ ne soit pas planaire; alors, d'après le théorème de WAGNER (voir théorème 5.4.3), on peut contracter Γ en un graphe qui contient $K_{3,3}$ ou K_5 . Par le lemme 6.4.3 v), il suffit de démontrer que ni $K_{3,3}$ ni K_5 n'admettent de dual combinatoire.

Si $\Gamma^c = (V^c; E^c, N^c)$ est dual combinatoire de K_5 , on a $|V^c| = |E| - |V| + 2 = 10 - 5 + 2 = 7$ et $\mu(K_5) = 3$; or comme

$$\sum_{x \in V^c} d(x) = 2|E^c|$$

on déduit $\delta(\Gamma^c) \times |V^c| \leq 2|E^c|$; avec le ii) du lemme 6.4.3, on aurait alors :

$$|V^c| \leq \frac{2|E^c|}{\delta(\Gamma^c)} \leq \frac{2|E^c|}{\mu(\Gamma)} = \frac{2|E|}{3} = \frac{20}{3} < 7 = |V^c|,$$

absurde.

Si Γ^c est dual combinatoire de $K_{3,3}$, on a $|V^c| = |E| - |V| + 2 = 9 - 6 + 2 = 5$ et $\mu(K_{3,3}) = 4$; de la même façon que précédemment

$$|V^c| \leq \frac{2|E^c|}{\delta(\Gamma^c)} \leq \frac{2|E^c|}{\mu(\Gamma)} = \frac{2|E|}{4} = \frac{18}{4} < 5 = |V^c|,$$

absurde. Cela achève la preuve. □

Il existe un autre critère de planarité, de nature encore plus algébrique, lié à l'observation suivante.

L'espace des cocycles $\mathcal{C}^o(\Gamma)$ d'un graphe Γ est engendré par l'ensemble des cocycles $E(x) = C^o(\{x\}, V \setminus \{x\})$, $x \in V$ (exercice); lorsque Γ est planaire, on peut appliquer l'observation précédente à Γ^* : ses cocycles $E(\varphi)_{\varphi \in \Phi}$ sont tels que toute arête appartient à au plus deux $E(\varphi)$, puisque toute arête est adjacente à au plus deux faces (voir proposition 5.2.6). Puisque d'une part $\mathcal{C}(\Gamma) = \mathcal{C}^o(\Gamma^*)$ et que d'autre part on peut extraire de la famille génératrice $E(\varphi)_{\varphi \in \Phi}$ une base, on a donc obtenu le théorème suivant.

Théorème 6.4.5 (MACLANE, 1937). *Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe connexe sans boucle. Ce graphe est planaire si et seulement si l'espace des cycles possède une **base simple**, c'est-à-dire est telle que toute arête soit adjacente à au plus deux éléments de cette base.*

6.5 Compléments d'algèbre linéaire

6.5.1 Espaces vectoriels

On appelle **anneau** un ensemble non vide A muni de deux lois de composition interne, respectivement notées additivement et multiplicativement vérifiant les propriétés suivantes :

- l'ensemble A est un groupe abélien (annexe du chapitre 1) pour la loi additive dont le neutre est noté 0 ;
- la multiplication est associative ;
- la multiplication est distributive à droite et à gauche par rapport à l'addition.

Si la loi multiplicative de A admet un élément neutre (ou unité) noté 1 , on dit que A est un **anneau unitaire**. Un anneau unitaire est **commutatif** si la multiplication est commutative. Si tous les éléments non nuls d'un anneau unitaire A sont inversibles, on dit que A est un **corps**. Les corps que nous rencontrerons sont principalement $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou encore $\mathbb{F}_2$, le corps à deux éléments.

Soit K un corps ; un ensemble E est appelé **K -espace vectoriel** s'il est muni d'une loi de composition interne, notée additivement et d'une loi externe notée multiplicativement $K \times E \rightarrow E$, $(a, v) \mapsto av$, vérifiant les propriétés suivantes :

- l'ensemble A est un groupe abélien pour la loi interne additive dont le neutre est noté 0_E ;
- si 1 est l'élément unité de K , alors $1v = v$ pour tout $v \in E$;
- $a(bv) = (ab)v$ pour tous $a, b \in K$ et tout $v \in E$;
- $(a + b)v = av + bv$ pour tous $a, b \in K$ et tout $v \in E$;
- $a(u + v) = au + av$ pour tout $a \in K$ et tous $u, v \in E$.

Les éléments de K sont appelés **scalaires** et K est appelé **corps de base** de l'espace vectoriel E ; les éléments de E sont appelés **vecteurs**. Par exemple $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{F}_2^n$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ et $\mathbb{F}_2$ respectivement.

Soit E un K -espace vectoriel et $F \subseteq E$ non vide ; alors F est un **sous-espace vectoriel** de E si la restriction à F des lois de E font de F un espace vectoriel sur K .

Une famille $F = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_k\}$ d'éléments d'un K -espace vectoriel E est une **famille génératrice** si

$$\text{pour tout } u \in E, \text{ il existe } a_1, a_2, \dots, a_k \in K \text{ tels que } u = \sum_{i=1}^k a_i v_i.$$

Cette écriture s'appelle **combinaison K -linéaire** de vecteurs de E .

On dit qu'une famille $F = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_k\}$ d'un K -espace vectoriel E est **linéairement indépendante ou libre** si

$$\left. \begin{array}{l} a_1, a_2, \dots, a_k \in K \\ \sum_{i=1}^k a_i v_i = 0_E \end{array} \right\} \implies a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0.$$

On appelle **base** d'un K -espace vectoriel E une famille à la fois libre et génératrice. Ainsi une famille $B = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_k\}$ d'un K -espace vectoriel E est une base si pour tout $u \in E$, il existe un k -uplet **unique** de scalaires $a_1, a_2, \dots, a_k \in K$ tels que

$$u = \sum_{i=1}^k a_i v_i.$$

Soit E un K -espace vectoriel possédant une base dont le nombre d'éléments, noté n , est fini ; alors toute base de E admet n éléments. Ce nombre est appelé **dimension** de E sur K et il est noté $\dim_K E$.

Soient E et F deux K -espaces vectoriels et f une application de E dans F . On dit que f est **K -linéaire** si

- $f(u + v) = f(u) + f(v)$ pour tous $u, v \in E$;
- $f(au) = af(u)$ pour tout $a \in K$ et tout $u \in E$.

L'ensemble $\mathcal{A}(E, F)$ des applications de E dans F est un K -espace vectoriel et son sous-ensemble des applications K -linéaires, noté $\mathcal{L}(E, F)$, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(E, F)$. Une application K -linéaire de E dans E est appelée **endomorphisme** de E . Si une application K -linéaire f de E dans F est de plus une bijection, on dit que f est un **isomorphisme** de K -espaces vectoriels et que E et F sont **isomorphes**. Deux K -espaces vectoriels qui ont même dimension (sur K) sont isomorphes.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$; l'**image** de f est l'ensemble :

$$\text{Im}(f) = \{f(u), u \in E\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de F . Le **rang** de f est la dimension de $\text{Im}(f)$.

Le **noyau** de f est l'ensemble :

$$\text{Ker}(f) = \{u \in E, f(u) = 0\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de E .

Si F est un sous-espace vectoriel de E , alors la structure de E induit sur le quotient E/F une structure de K -espace vectoriel : $(u+F) + \lambda(v+F) = (u + \lambda v) + F$, pour tous $u, v \in E$ et $\lambda \in K$.

On a l'isomorphisme $E/\text{Ker } f \simeq \text{Im } f$.

On définit de la même manière l'image et le noyau d'un morphisme de groupes.

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels d'un K -espace vectoriel E .

On définit la **somme** de E_1 et E_2 par :

$$E_1 + E_2 = \{u_1 + u_2, u_1 \in E_1, u_2 \in E_2\}.$$

Si pour tout $u \in E_1 + E_2$ la décomposition $u = u_1 + u_2$, où $u_1 \in E_1$ et $u_2 \in E_2$ est unique, on dit que la somme est **directe** : on écrit alors $E_1 \oplus E_2$. Les sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 sont des **supplémentaires** dans E si $E = E_1 \oplus E_2$.

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels d'un K -espace vectoriel E , alors $E_1 + E_2$ est une somme directe si et seulement si $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.

Dans ce cas, on a l'identité $\dim_K E_1 + \dim_K E_2 = \dim_K E$.

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on a la **formule du rang** : $\dim_K E = \dim_K \text{Im}(f) + \dim_K \text{Ker}(f)$.

6.5.2 Matrices

Une **matrice** de type $m \times n$ sur un corps K est un ensemble de n vecteurs-colonnes de longueur m ou un ensemble de m vecteurs-lignes de longueur n ; les coordonnées de ces vecteurs appartiennent au corps de base K . C'est donc un tableau de $m \times n$ éléments de K . On note ainsi une telle matrice par :

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

les éléments $a_{i,j}$ sont appelés **coefficients** de la matrice A . L'ensemble des matrices de type $m \times n$ est noté $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ ou $K^{m,n}$.

Si $m = n$, on dit que la matrice A est **carrée**. La **matrice transposée** de la matrice A est la matrice

$${}^tA = (a_{j,i})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq m}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} & \cdots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3,2} & \cdots & a_{m,2} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} & \cdots & a_{m,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & a_{3,n} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

C'est donc un élément de $K^{n,m}$.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(K)$. On appelle **matrice extraite** de A toute matrice obtenue en supprimant des lignes et des colonnes dans A .

Soient $A = (a_{i,j}) \in K^{m,n}$ et $B = (b_{i,j}) \in K^{n,p}$. La **matrice produit** $C = AB = (c_{i,j}) \in K^{m,p}$ est définie par :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}, \text{ pour } 1 \leq i \leq m \text{ et } 1 \leq j \leq p.$$

On remarquera que la matrice $A {}^tA$ est une matrice carrée $m \times m$.

Soit E un K -espace vectoriel de dimension m et F un K -espace vectoriel de dimension n . Soit $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ une base de E et $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ une base de F . Soit f une application linéaire de E dans F . On définit $a_{i,j}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, en posant

$$f(u_j) = \sum_{i=1}^m a_{i,j} v_i, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Les coefficients $a_{i,j}$ forment une matrice $A = (a_{i,j})$ appelée **matrice associée à l'application linéaire f** relativement aux bases U et V . Cette matrice détermine complètement l'application linéaire f .

Réciproquement, soit $A \in K^{m,n}$ une matrice ; alors l'application $K^m \rightarrow K^n$, $x \mapsto Ax$ (produit matriciel de A par le vecteur-colonne x) définit une application linéaire. On remarquera que la j -ième colonne de A est Ae_j où

$$e_j = {}^t(\underbrace{0, 0, 0, \dots, 0}_{j-1}, \underbrace{1, 0, \dots, 0}_{m-j}) \in K^{m,1}.$$

Les vecteurs $e_1, e_2, e_3, \dots, e_m$ forment une base appelée **base canonique** de K^m .

Notons $(f_1, f_2, f_3, \dots, f_n)$ la base canonique de K^n , on a

$$Ae_j = \sum_{k=1}^n a_{k,j} f_k, \quad j = 1, \dots, m.$$

Donc si $x = {}^t(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) \in K^m$, alors les $x_i, i = 1, \dots, m$, sont les coordonnées du vecteur x dans la base $(e_1, e_2, e_3, \dots, e_m)$. Si $y = Ax = {}^t(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \in K^n$, alors les y_i sont les coordonnées du vecteur Ax dans la base $(f_1, f_2, f_3, \dots, f_n)$.

Soit E un K -espace vectoriel de dimension m et $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ une base de E . Soit $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ une autre base de E ; on peut écrire

$$u_j = \sum_{i=1}^m p_{i,j} v_i, \quad j = 1, \dots, m.$$

La matrice $P = (p_{i,j})_{1 \leq i, j \leq m}$ est appelée **matrice de passage** de la base V à la base U : si $x \in E$ est représenté en base U par X_U et en base V par X_V , on a $X_V = PX_U$.

Le **déterminant d'une matrice** carrée est défini récursivement de la manière suivante :

- le déterminant de la matrice 1×1 , $A = (a)$ est $\det(a) = a$;
- le déterminant de la matrice carrée 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

est

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2} ;$$

- le déterminant de la matrice carrée $n \times n$, $n \geq 1$,

$$A = (a_{i,j}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

est

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} a_{1,j} \Delta_{1,j},$$

où $\Delta_{i,j}$ est le déterminant de la matrice carrée extraite $A_{i,j}$ obtenue en supprimant dans A la i -ième ligne et la j -ième colonne.

On peut montrer qu'on peut développer un déterminant par rapport à n'importe quelle colonne ou ligne de A :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}.$$

Pour $n \geq 1$, on note I la matrice diagonale carrée d'ordre n dont la diagonale est garnie de 1. Elle est appelée **matrice identité** d'ordre n . Une matrice A carrée d'ordre n , $n \geq 1$, est dite **inversible** s'il existe une matrice B carrée d'ordre n telle que

$$AB = BA = I,$$

c'est-à-dire $\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^n b_{i,k} a_{k,j} = \delta_{ij}$ (symbole de KRONECKER). La matrice B est alors appelée **inverse** de A et on la note A^{-1} .

On a en outre la propriété $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$, donc l'application $\det$ définit un morphisme du groupe des matrices carrées inversibles d'ordre n dans $K \setminus \{0\}$: on a en particulier $\det(I) = 1$ et $\det(P^{-1}) = (\det(P))^{-1}$ si P est carrée inversible.

Ainsi à tout endomorphisme f de E , en fixant une base $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ de E , on peut associer une matrice carrée A_U , sa matrice relativement à cette base : A_U est la matrice $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ définie par

$$f(u_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} u_i, \quad j = 1, \dots, n.$$

À f on peut donc associer le déterminant $\det(A_U)$. On établit que ce déterminant ne dépend pas de la base de E choisie, il est noté $\det f$: soient U et V deux bases de E et P la matrice de passage de V à U ; on note A_U la matrice de f relativement à U et A_V la matrice de f relativement à V . On a $A_U = P^{-1} A_V P$ et par passage au déterminant $\det(A_U) = \det(A_V)$.

6.5.3 Produits scalaires

On peut munir $\mathbb{C}^n$ du **produit scalaire** canonique défini ainsi : pour $z = (z_1, \dots, z_n)$ et $z' = (z'_1, \dots, z'_n) \in \mathbb{C}^n$ on pose

$$\langle z, z' \rangle = \sum_{i=1}^n z_i \overline{z'_i}, \quad (\overline{z'_i} \text{ désigne le conjugué de } z'_i);$$

il vérifie

- i) $\langle z, z' + z'' \rangle = \langle z, z' \rangle + \langle z, z'' \rangle, \forall z, z', z'' \in \mathbb{C}^n$;
- ii) $\langle \lambda z, z' \rangle = \lambda \langle z, z' \rangle, \forall z, z' \in \mathbb{C}^n, \forall \lambda \in K$;
- iii) $\langle z', z \rangle = \overline{\langle z, z' \rangle}, \forall z, z' \in \mathbb{C}^n$ (symétrie hermitienne) ;
- iv) si pour tout $w \in \mathbb{C}^n$, on a $\langle z, w \rangle = 0$, alors $z = 0_{\mathbb{C}^n}$ (non dégénérescence).

Ce produit scalaire définit une norme (la norme hermitienne de $\mathbb{C}^n$) :

$$\|z\| = \sqrt{\langle z, z \rangle} = \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right)^{1/2}.$$

dont la distance associée fournit la structure d'espace métrique de $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{R}^n$: $d(x, y) = \|x - y\|$.

Dans $\mathbb{R}^n$, on procède de même sans tenir compte de la conjugaison complexe : si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $x' = (x'_1, \dots, x'_n) \in \mathbb{R}^n$ on pose :

$$\langle x, x' \rangle = \sum_{i=1}^n x_i x'_i.$$

Les propriétés i), ii), iii) et iv) restent valables ; la symétrie hermitienne iii) se traduit en :

iii') $\langle x', x \rangle = \langle x, x' \rangle$ (symétrie).

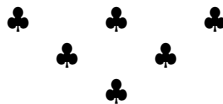
La norme que ce produit scalaire induit est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

Dans le cas de $\mathbb{F}_2^n$, le produit scalaire est défini comme pour $\mathbb{R}^n$; les propriétés i), ii), iii') et iv) restent valables.

Pour K corps quelconque et A sous-ensemble de K^n préalablement muni du produit scalaire canonique, l'**orthogonal** de A est l'ensemble

$$A^\perp = \{x \in K^n : \forall a \in A, \langle x, a \rangle = 0\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de K^n .



Chapitre 7

Coloration

Combien de couleurs faut-il pour colorier une carte géographique de telle sorte que deux pays ayant une frontière commune reçoivent des couleurs différentes ?

Dans une université, le département de mathématiques-informatique propose un certain nombre de cours. Les étudiants doivent choisir plusieurs cours. Pour le directeur du département et l'équipe pédagogique le problème est le suivant : deux cours qui ont été choisis par au moins un étudiant ne peuvent être programmés en même temps. On peut modéliser ce problème par un graphe de la manière suivante : les sommets du graphe représentent les cours ; deux sommets sont adjacents s'ils ont été choisis par au moins un étudiant. Pour savoir le nombre de plages horaires qu'il faut aménager de telle sorte que tous les étudiants puissent suivre tous les cours qu'ils ont choisis, on colorie les sommets du graphe de manière à ce que deux sommets adjacents reçoivent des couleurs différentes.

Dans ce chapitre nous allons traiter du problème des colorations. Celui-ci apparaît souvent en théorie des graphes. Historiquement c'est le premier exemple qui a donné naissance à ce sujet. Nous verrons quelques applications et nous prouverons des théorèmes classiques tels que le théorème de BROOKS et le théorème de VIZING. Le dernier paragraphe introduira des résultats plus récents. Tout au long du chapitre, les graphes seront considérés d'ordre fini et **sans boucle**.

7.1 Coloration des sommets

7.1.1 Propriétés générales

Une **coloration des sommets** d'un graphe $\Gamma = (V; E, N)$ est une application

$$f : V \longrightarrow \mathbb{C}$$

telle que $f(x) \neq f(y)$ lorsque x est adjacent à y .

On appelle **k -sommet-coloration** ou **k -coloration** une coloration des sommets avec k couleurs : $|f(V)| = k$, c'est pourquoi on prendra $f(V) = \{1, 2, \dots, k\}$. S'il n'y a aucune ambiguïté on dira **k -coloration**. Le plus petit k tel que le graphe Γ admette une k -coloration est appelé **nombre chromatique** de Γ , noté $\chi(\Gamma)$. Un graphe Γ tel que $\chi(\Gamma) \leq k$ est appelé **k -colorable**. La figure 7.1 illustre ce concept.

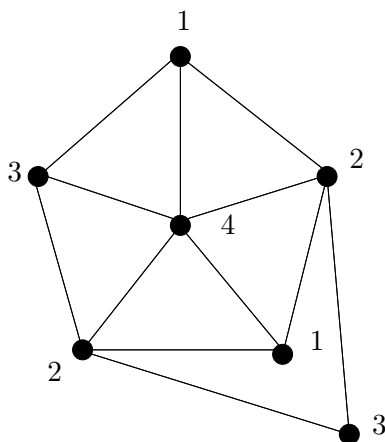


Figure 7.1 – Graphe admettant une 4-coloration et de nombre chromatique égal à $\chi(\Gamma) = 4$.

Il est clair que pour un graphe complet K_n on a $\chi(K_n) = n$ et donc pour tout graphe Γ on a :

$$\chi(\Gamma) \geq \omega(\Gamma)$$

($\omega(\Gamma)$ est le cardinal maximum d'un sous-graphe complet).

Exemple 7.1.1. Une grille (carrée) de *sudoku* est composée de 9 sous-grilles carrées de 9 cases chacune. Le jeu consiste, à partir d'une grille partiellement remplie avec les chiffres 1 à 9, à la compléter de sorte

que chaque rangée (ligne et colonne) et chaque sous-grille contiennent exactement une fois chacun des chiffres. Chaque problème de *sudoku* (*i.e.* la grille partiellement remplie) possède une unique solution, c-à-d une unique manière de la compléter. On modélise usuellement cette question par un graphe Γ à 81 sommets (les cases); les arêtes relient deux sommets s'ils sont sur une même rangée ou dans une même sous-grille : le graphe est 20-régulier. Il s'agit donc d'un problème de coloration où les chiffres jouent le rôle des couleurs. Les sous-grilles sont des K_9 , donc les 9 couleurs sont nécessaires : $\chi(\Gamma) \geq 9$. Mais en fait $\chi(\Gamma) = 9$. Résoudre un *sudoku* consiste à compléter une 9-coloration partielle. La figure 7.2 donne un exemple de grille de *sudoku* partiellement remplie et possédant une 9-coloration unique.

	9			2				7
				9		2	6	
5					7		9	
	1	9	6			3		
					9		1	
6	8	5		1				
	7		4	8	1			
1			9					
9							4	1

8	9	1	5	2	6	4	3	7
4	3	7	1	9	8	2	6	5
5	6	2	3	4	7	1	9	8
7	1	9	6	5	4	3	8	2
3	2	4	8	7	9	5	1	6
6	8	5	2	1	3	9	7	4
2	7	3	4	8	1	6	5	9
1	4	8	9	6	5	7	2	3
9	5	6	7	3	2	8	4	1

Figure 7.2 – Un problème de *sudoku* et sa solution.

Soit Γ' un sous-graphe de Γ . Toutes les couleurs utilisées pour colorier les sommets de Γ' dans une coloration minimum de Γ peuvent être utilisées pour une k' -coloration de Γ' . Comme $k' \geq \chi(\Gamma')$ on a : $\chi(\Gamma) \geq \chi(\Gamma')$.

Exercice 7.1. Soit C_n le cycle simple à n sommets. Démontrer que :

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \geq 2 \text{ est pair,} \\ 3 & \text{si } n \geq 3 \text{ est impair.} \end{cases}$$

Rappelons que le simplifié Γ_s du graphe $\Gamma = (V; E, N)$ est le graphe simple obtenu en supprimant dans Γ les boucles et en remplaçant chaque p -arête par une arête simple.

Lemme 7.1.2. Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe et soit $\Gamma_s = (V; E)$ son simplifié. Alors on a :

- i) $\Delta(\Gamma_s) \leq \Delta(\Gamma)$ (*rappel : $\Delta(\Gamma)$ est le degré maximum des sommets*).
- ii) Une application f est une k -sommets-coloration de Γ_s si et seulement si c'est une k -sommets-coloration de Γ .
- iii) Si Γ est sans boucle, $\chi(\Gamma) = \chi(\Gamma_s)$.

Démonstration. Par construction le nombre d'arêtes de Γ_s est inférieur ou égal au nombre d'arêtes de Γ . D'où la première assertion.

Deux sommets sont adjacents dans Γ_s si et seulement s'ils sont adjacents dans Γ . Comme Γ_s et Γ ont le même ensemble de sommets, l'identité Id_V est une bijection de V sur lui-même telle que $\{x, y\}$ est une arête de Γ_s si et seulement si $\{a \in E, \epsilon(a) = [x, y]\}$ est une p -arête de Γ . Par conséquent si f est une k -sommets-coloration de Γ alors $f \circ \text{Id}_V$ est une k -sommets-coloration de Γ_s . La réciproque se fait de la même manière. De là on a : $\chi(\Gamma) = \chi(\Gamma_s)$. $\square$

Ainsi, dans ce paragraphe, sans perdre de généralité, on peut considérer que les graphes sont simples. Si ce n'est pas le cas on passe au simplifié auquel on applique les résultats et on utilise le lemme 7.1.2.

Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe simple ; un sous-ensemble de sommets V' de V est un **(ensemble) indépendant** ou un **(ensemble) stable** si toute paire de sommets $x, y \in V'$ n'est jamais une arête. Un indépendant V' est un **(indépendant) maximum** si pour tout ensemble indépendant V'' on a : $|V''| \leq |V'|$. Cela signifie que pour tout $x \notin V'$, il existe une arête de V' à x . Le cardinal d'un stable maximum sera noté $\alpha(\Gamma)$. On peut définir également la notion d'ensemble indépendant dans un multigraphe $\Gamma = (V; E, N)$: un sous-ensemble de sommets V' de V est un ensemble indépendant ou ensemble stable si $\Gamma(V')$ ne contient aucune arête.

Donner une k -coloration aux sommets d'un graphe c'est donc partitionner ses sommets en ensembles stables $S_1, S_2, \dots, S_k$. Quand on a une k -coloration alors toute permutation des couleurs des S_i fournit une k -coloration.

Proposition 7.1.3. *Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe simple, alors*

$$\chi(\Gamma) \geq \left\lceil \frac{|V|}{\alpha(\Gamma)} \right\rceil$$

et

$$\chi(\Gamma) + \alpha(\Gamma) \leq |V| + 1.$$

Démonstration. Nous savons qu'une coloration des sommets est une partition $\{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ de V . De plus pour tout i , $1 \leq i \leq \chi(\Gamma)$, V_i est un ensemble stable et nous avons $|V_i| \leq \alpha(\Gamma)$. Donc $|V| = |V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k| = \sum_{1 \leq i \leq \chi(\Gamma)} |V_i| \leq \chi(\Gamma) \alpha(\Gamma)$. D'où la première inégalité.

Si on colorie un ensemble indépendant maximum V' avec une couleur, on utilisera au plus $|V| - \alpha(\Gamma)$ couleurs pour colorier $V \setminus V'$. Ainsi on a $\chi(\Gamma) \leq (|V| - \alpha(\Gamma)) + 1$. $\square$

Proposition 7.1.4. *Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe simple, alors*

$$\chi(\Gamma) \leq \Delta(\Gamma) + 1.$$

Démonstration. Raisonnons par récurrence sur le nombre n de sommets du graphe. Si $n = 1$ c'est trivial.

Supposons l'assertion vraie pour tout graphe ayant au plus $n - 1$ sommets, $n \geq 2$, et soit Γ un graphe avec n sommets. Si on supprime un sommet x le graphe obtenu Γ' a un degré maximum qui est au plus égal à $\Delta(\Gamma)$. Par hypothèse de récurrence, ce graphe est $(\Delta(\Gamma) + 1)$ -colorable. Une $(\Delta(\Gamma) + 1)$ -coloration de Γ est obtenue en coloriant le sommet x avec une couleur différente des couleurs déjà affectées aux sommets adjacents à x (il y en a au plus $\Delta(\Gamma)$). $\square$

En combinant la proposition 7.1.3 et la proposition 7.1.4 nous obtenons un encadrement du nombre chromatique d'un graphe.

Corollaire 7.1.5. *Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe simple, alors*

$$\left\lceil \frac{|V|}{\alpha(\Gamma)} \right\rceil \leq \chi(\Gamma) \leq \Delta(\Gamma) + 1.$$

Remarque 7.1.6. La première inégalité peut être une égalité : $\Gamma = C_4$. On peut avoir $\chi(\Gamma) = \Delta(\Gamma) + 1$. La figure 7.3 illustre ce cas d'égalité.

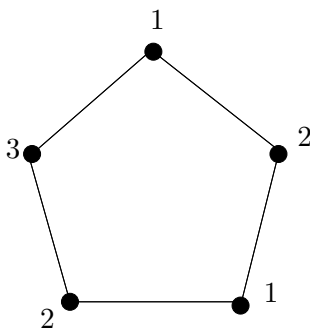
Il est possible de développer un algorithme simple pour colorier un graphe. Supposons que les sommets soient ordonnés : $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Nous allons colorier les sommets un à un en utilisant toujours la « plus petite » couleur possible, les couleurs étant représentées par des nombres entiers : $1, 2, 3, \dots$

coloration(Γ)

Donnée : $A_{x_1}, A_{x_2}, \dots, A_{x_n}$; (liste d'adjacence des sommets)

Donnée : $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$; (un ordre des sommets de Γ)

Sortie : $f : V(\Gamma) \longrightarrow \mathbb{N}$; (une coloration de Γ)

Figure 7.3 – Graphe tel que $\chi(\Gamma) = 3 = \Delta(\Gamma) + 1$.**Début**

$$f(x_1) = 1;$$

Pour Tout i , i de 2 à n , **Faire**

$$f(x_i) = \min\{j; f(x_t) \neq j; \forall t = 1, 2, \dots, i-1 \text{ tel que } x_t \in A_{x_i}\};$$

FinPour

Fin

L'algorithme ci-dessus construit bien une coloration, sa complexité est polynomiale. Mais il ne donne pas le nombre chromatique. En fait le nombre de couleurs utilisées pour colorier un graphe grâce à cet algorithme dépend de l'ordre des sommets (il y en a $n!$ possibles); par conséquent il est peu probable que notre algorithme donne une coloration avec un nombre minimum de couleurs. En fait on a le problème suivant :

Données : un graphe Γ et un entier k .

Problème : est-il possible de colorier les sommets de Γ avec k couleurs ?

Ce problème est $\mathcal{NP}$ complet pour $k \geq 3$ (pourquoi $k \geq 3$?). Donc il n'existe aucun algorithme ayant une complexité polynomiale qui puisse résoudre le problème ci-dessus, excepté si $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

Dans notre algorithme le sommet x_i , devant être colorié, admet au plus $\Delta(\Gamma)$ sommets adjacents dans le sous-graphe induit sur les sommets $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i$; plus précisément il a au plus $\Delta(\Gamma)$ prédécesseurs quand il est colorié dans la boucle **Pour Tout**, donc il y a au plus $\Delta(\Gamma)$ couleurs avec lesquelles on ne peut pas le colorier. Par conséquent il faudra au plus $\Delta(\Gamma) + 1$ couleurs pour colorier le graphe grâce à l'algorithme.

Exercice 7.2. Utiliser l'algorithme ci-dessus pour donner une nouvelle preuve de la proposition 7.1.4.

Une borne un peu plus fine est donnée par la proposition suivante.

Proposition 7.1.7. *Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe simple. Alors*

$$\chi(\Gamma) \leq 1 + \max\{\delta(\Gamma'), \Gamma' \text{ sous-graphe induit de } \Gamma\} \leq 1 + \Delta(\Gamma).$$

Démonstration. Rappelons que $\delta(\Gamma)$ est le degré minimum des sommets. Posons $k = \max\{\delta(\Gamma'), \Gamma' \text{ sous-graphe induit de } \Gamma\}$ et $n = |V|$.

Le graphe Γ contient un sommet x_n tel que $d(x_n) = \delta(\Gamma) \leq k$. Si on supprime ce sommet on obtient le graphe $\Gamma_{n-1} = \Gamma(V \setminus \{x_n\})$. Soit x_{n-1} un sommet de Γ_{n-1} tel que $d(x_{n-1}) = \delta(\Gamma_{n-1}) \leq k$. On continue le processus jusqu'à l'obtention du graphe $\Gamma_1 = \Gamma(V \setminus \{x_n, x_{n-1}, \dots, x_2\})$ qui est constitué du seul sommet x_1 . Ainsi nous avons « ordonné » les sommets $x_1, x_2, \dots, x_n$ de telle sorte que chaque x_i , $1 \leq i \leq n$, a au plus k voisins dans Γ_i , car $\delta(\Gamma_i) \leq k$ est le degré de x_i dans Γ_i . Ainsi on a besoin d'au plus $1 + k$ couleurs pour colorier le graphe. $\square$

Corollaire 7.1.8. *Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe simple connexe qui n'est pas régulier. On a*

$$\chi(\Gamma) \leq \Delta(\Gamma).$$

Démonstration. Supposons que $\chi(\Gamma) > \Delta(\Gamma)$, alors en utilisant la proposition 7.1.4 on a : $\chi(\Gamma) = \Delta(\Gamma) + 1$, en appliquant la proposition 7.1.7 il existe un sous-graphe induit Γ' tel que $\delta(\Gamma') = \Delta(\Gamma)$. Mais alors Γ' est un sous-graphe induit régulier et celui-ci ne peut pas être connecté à un sommet extérieur à Γ' car il est régulier de degré $\Delta(\Gamma)$; Γ étant connexe, on a $\Gamma = \Gamma'$, mais Γ' est régulier : contradiction. $\square$

Une question intéressante est de savoir quels sont les graphes qui ne vérifient pas l'inégalité du corollaire 7.1.8. Le théorème de BROOKS, qui est le principal résultat de cette section, montre que les exceptions sont des graphes très particuliers.

7.1.2 Le théorème de BROOKS

Avant de donner la démonstration du théorème de BROOKS nous avons besoin du

Lemme 7.1.9. *Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe simple connexe sans sommet d'articulation (i.e. 2-connexe), non complet, vérifiant $\delta(\Gamma) \geq 3$ (donc $|V| \geq 3$). Alors il existe un sommet x ayant deux voisins x_1 et x_2 non adjacents tels que $\Gamma(V \setminus \{x_1, x_2\})$ soit connexe.*

Démonstration. Deux cas sont à étudier :

Premier cas : Γ est 3-connexe.

Il existe un sommet x ayant deux voisins non adjacents : sinon deux voisins quelconques x_1, x_2 de chaque sommet x sont adjacents ; montrons que le graphe est complet : soient $x, y \in V$ deux sommets quelconques distincts ; comme le graphe est connexe il existe une chaîne $(x, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, y)$; x et t_2 étant voisins de t_1 sont adjacents, t_1 et t_3 sont voisins de t_2 donc adjacents ; alors x et t_3 sont voisins de t_1 , donc adjacents, etc ; de proche en proche on montre que y est voisin de x . Ainsi il existe x ayant deux voisins x_1, x_2 non adjacents. Le graphe étant 3-connexe, $\Gamma(V \setminus \{x_1, x_2\})$ est connexe.

Second cas : Γ est 2-connexe mais pas 3-connexe.

1. **Il existe un sommet x de Γ tel que $\Gamma(V \setminus \{x\})$ (que nous notons $\Gamma - x$) possède au moins un sommet d'articulation.**
D'après le corollaire 4.2.6 de la proposition 4.2.5, $\Gamma - x$ admet au moins deux blocs contenant chacun un seul sommet d'articulation. Soient B_1 et B_2 ces blocs ; soient b_1, b_2 leurs sommets d'articulation (il se peut que $b_1 = b_2$).
2. **B_1 et B_2 ont chacun au moins deux sommets :** si $\{a\}$ est un bloc, c'est un sommet isolé ; cela ne se peut pas puisque $\Gamma - x$ est connexe avec au moins deux sommets.
3. **Soit $e = \{a, b\}$ une arête « sortante » de B_1 , i.e. $a \in B_1$, $b \notin B_1$.** Alors ou bien $b = x$ ou bien $a = b_1$. De même pour B_2 . En effet si $b \neq x$, e est une arête de $\Gamma - x$, donc appartient à un bloc B'_1 et $a \in B_1 \cap B'_1$ est sommet d'articulation de $\Gamma - x$ (lemme 4.2.3), et comme $a \in B_1$ nécessairement $a = b_1$.
4. **Le sommet x a deux voisins x_1, x_2 qui sont non adjacents.**
Soit $t_1 \in B_1, t_1 \neq b_1$; Γ étant 2-connexe il existe une chaîne de t_1 à x évitant b_1 ; cette chaîne quitte B_1 par une arête sortante $e = \{a, b\}$, avec $a \neq b_1$; d'après le point 3 ci-dessus, on a $b = x$; posons $x_1 = a$: x est adjacent à $x_1 \neq b_1, x_1 \in B_1$. De même x est adjacent à $x_2 \neq b_2, x_2 \in B_2$. Et x_1, x_2 ne sont pas adjacents.
5. **Montrons que $\Gamma(V \setminus \{x_1, x_2\})$ est connexe.** D'abord, le degré de x étant au moins 3, il existe $y \in \Gamma - x$ adjacent à $x, y \neq x_1, x_2$. Il suffit de montrer que tout sommet t de $\Gamma - x$ peut être joint à y en restant dans $\Gamma - x$ et en évitant x_1 et x_2 :
– si $y \notin B_1 \cup B_2$. Soit C une chaîne de t à y dans $\Gamma - x$; si C passe par x_1 , elle entre dans B_1 , donc passe par b_1 (d'après 3) ; et elle doit ressortir, également par b_1 ; on peut donc raccourcir C en

- supprimant le passage dans B_1 , évitant ainsi x_1 ; on évite de la même manière x_2 (voir la figure 7.4) ;
- si $y \in B_1$. Soit C une chaîne de t à y dans $\Gamma - x$; elle entre donc dans B_1 , par b_1 (toujours d'après 3), puis va de b_1 à y dans B_1 ; si elle passe par x_1 , comme B_1 est 2-connexe il y a une autre chaîne sommet-disjointe de b_1 à y , celle-ci évite x_1 ;
 - si $y \in B_2$. Raisonement analogue. □

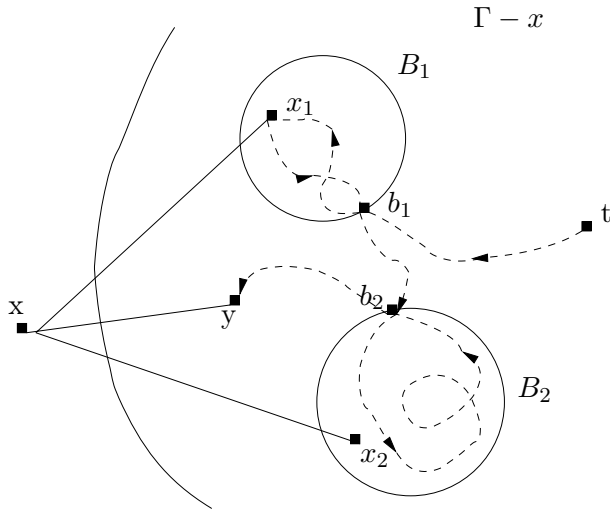


Figure 7.4 – Cas $y \notin B_1 \cup B_2$ du lemme 7.1.9.

Théorème 7.1.10 (BROOKS, 1941). *Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe simple connexe. Si Γ n'est ni un graphe complet, ni un cycle de longueur impaire alors $\chi(\Gamma) \leq \Delta(\Gamma)$.*

Démonstration. Si $\Delta(\Gamma) \leq 2$, alors Γ est soit une chaîne, soit un cycle d'ordre pair et c'est fini. Supposons que $\Delta(\Gamma) \geq 3$. Si Γ n'est pas régulier, alors d'après le corollaire 7.1.8 l'assertion est vraie. Supposons Γ k -régulier :

1. Si Γ admet un sommet d'articulation x , soient $C_1, C_2, C_3, \dots, C_p$, $p \geq 2$, les composantes connexes obtenues après suppression du sommet d'articulation x . Soit, pour tout i , le sous-graphe induit $\Gamma_i = \Gamma(C_i \cup \{x\})$. Le degré $d_i(x)$ de x dans chaque Γ_i est strictement inférieur à k car $k = \sum_{i=1}^p d_i(x)$. De plus pour tout $i \in \{1, 2, 3, \dots, p\}$, Γ_i n'est pas régulier car le sommet x est adjacent

aux autres composantes connexes alors que les sommets de C_i ne le sont pas. Donc, d'après le corollaire 7.1.8, chaque Γ_i peut être colorié avec au plus k couleurs. En permutant les couleurs des colorations de chaque Γ_i de telle sorte que x ait toujours la même couleur pour chaque Γ_i , on peut construire une coloration de Γ avec au plus k couleurs.

2. Si Γ n'admet pas de sommet d'articulation, d'après le lemme 7.1.9 il existe un sommet x ayant deux voisins x_1 et x_2 non adjacents tels que $\Gamma(V \setminus \{x_1, x_2\})$ soit connexe. Par conséquent, d'après la proposition 2.2.6, il admet un graphe partiel qui est un arbre (arbre de recouvrement); on ordonne les sommets de cet arbre (et donc de $\Gamma(V \setminus \{x_1, x_2\})$) de la façon suivante : $t_0 = x$ est le plus grand élément; puis on ordonne (arbitrairement) les voisins de x : $t_1 > t_2 > \dots > t_\alpha$, puis les sommets voisins des t_i dans Γ : $t_{\alpha+1} > t_{\alpha+2} > \dots > t_\beta$, etc. jusqu'à t_n ; on complète cet ordre en forçant $t_n > t_{n+1} = x_1 > t_{n+2} = x_2$. Ainsi $V(\Gamma) = V$ est ordonné :

$$x = t_0 > t_1 > t_2 > \dots > t_n > t_{n+1} = x_1 > t_{n+2} = x_2$$

de sorte que

$$\forall i, 1 \leq i \leq n+2, \exists t_j > t_i \text{ tel que } t_i \text{ soit adjacent à } t_j.$$

On construit maintenant une coloration $f : V \longrightarrow \{1, 2, \dots, k\}$: $f(t_{n+2}) = f(t_{n+1}) = 1, f(t_n) = 2$; cela est possible car x_1 et x_2 ne sont pas adjacents; ensuite t_n a un voisin plus grand que lui, donc au plus $k-1$ voisins plus petits (ici ce sont au plus t_{n+1} et t_{n+2}), on peut donc le colorier avec l'une des k couleurs; de façon générale t_i , ayant un voisin plus grand, a au plus $k-1$ voisins plus petits; on peut donc le colorier, sans conflit, avec l'une des k couleurs; on arrive ainsi à t_1 ; enfin $t_0 = x$ a k voisins, dont t_1, t_{n+1}, t_{n+2} , mais ces deux derniers sont de la même couleur, donc les voisins de x nécessitent au plus $k-1$ couleurs et on peut le colorier sans conflit. $\square$

7.2 Graphes planaires et cartes

Historiquement, le théorème des quatre couleurs est lié à la coloration de cartes géographiques : on souhaite que deux pays ayant une frontière commune soient coloriés différemment et cela avec un minimum de couleurs. Qu'est-ce donc qu'une carte de géographie? Du point de vue de la

théorie des graphes, il s'agit d'un graphe planaire (*i.e.* de genre 0 selon la terminologie du § 5.6), mais sans doute pas n'importe lequel ; remarquons d'abord qu'un tel graphe n'est pas nécessairement connexe : le VATICAN est une enclave en ITALIE, mais une telle situation ne pose pas de problème de coloration (une fois l'ITALIE coloriée, il suffit de prendre n'importe quelle autre couleur pour le VATICAN) ; ensuite il peut exister des arêtes doubles, comme le montre la situation d'ANDORRE sur la figure 7.5.

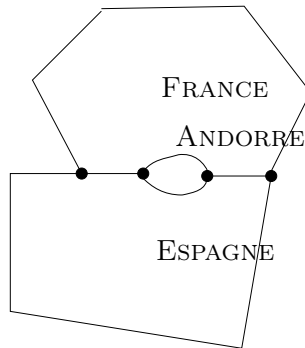


Figure 7.5 – Graphe des frontières entre l'ESPAGNE et la FRANCE.

Là encore il n'y a pas de problème de coloration : une fois FRANCE et ESPAGNE coloriées, on choisit pour ANDORRE n'importe quelle autre couleur.

Dans une carte « raisonnable » il n'y a pas d'arêtes pendantes : le graphe planaire de la figure 7.6 est associé à une carte peu plausible !

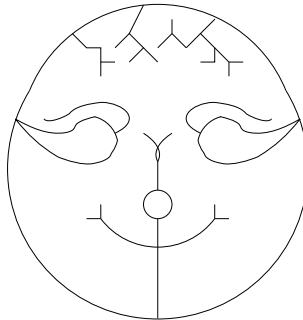


Figure 7.6 – Un graphe planaire représentant une situation géographique peu vraisemblable.

Il est donc assez raisonnable de définir une **carte** comme étant un graphe planaire plongé, simple et 2-connexe. On dit qu'une carte est **k -face-colorable** si elle peut être colorée avec k couleurs différentes sans que deux faces adjacentes quelconques ne soient de la même couleur. La coloration d'une carte se ramène ainsi à une question purement combinatoire.

Proposition 7.2.1. *Une carte Γ est k -face-colorable si et seulement si son dual Γ^* est k -sommets-colorable.*

Démonstration. Soit Γ une carte k -face-colorable et Γ^* son dual. Les faces de Γ sont les sommets de Γ^* , de sorte que toute coloration des faces de Γ fournit une coloration des sommets de Γ^* et réciproquement. $\square$

Pour les graphes planaires il existe des bornes de coloration assez fines. Le premier résultat est dû à P.J. HEAWOOD.

Théorème 7.2.2 (HEAWOOD, 1890). *Tout graphe planaire Γ est 5-sommets-colorable.*

Démonstration. On peut supposer que Γ est simple. Nous allons raisonner par récurrence sur le nombre n de sommets. Si $n \leq 5$ c'est trivial. Supposons le résultat vrai jusqu'à $n - 1 \geq 5$ et soit $\Gamma = (V; E)$ avec n sommets.

Γ possède un sommet x de degré au plus égal à 5 (corollaire 5.2.16). La suppression de ce sommet donne un graphe planaire ayant $n - 1$ sommets. Par hypothèse de récurrence celui-ci est 5-colorable. Le but maintenant est de colorier x avec l'une de ces 5 couleurs.

1. Si $d(x) < 5$, c'est fini.
2. Si $d(x) = 5$, soient x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 les sommets adjacents à x . Deux de ces sommets, disons x_1 et x_2 , ne sont pas adjacents car sinon Γ contiendrait K_5 et il ne serait pas planaire (théorème 5.4.1 de KURATOWSKI). Contractons dans Γ les deux arêtes $\{x, x_1\}$ et $\{x, x_2\}$: cela signifie qu'on contracte d'abord $a_1 = \{x, x_1\}$ donnant Γ/a_1 , avec z_{a_1} pour nouveau sommet, puis on contracte dans Γ/a_1 l'arête $a_2 = \{z_{a_1}, x_2\}$ induisant le sommet z_{a_2} que l'on notera plutôt u_x . On obtient un graphe planaire Γ' ayant moins de n sommets qui est donc 5-colorable par l'hypothèse de récurrence. Les sommets adjacents à u_x sont : les sommets adjacents à x , les sommets adjacents à x_1 et les sommets adjacents à x_2 . Soit $f' : V' \longrightarrow \{1, \dots, 5\}$ une 5-coloration de Γ' ; on pose
 - $f(y) = f'(y)$ pour $y \neq x, x_1, x_2$;

- $f(x_1) = f(x_2) = f'(u_x)$;
- $f(x) = c \notin \{f'(x_3), f'(x_4), f'(x_5), f'(u_x)\}$.

Cela donne une 5-coloration de Γ . □

Corollaire 7.2.3. *Toute carte est 5-face-colorable*

Démonstration. Conséquence immédiate de la proposition 7.2.1 et du théorème de HEAWOOD. □

Exercice 7.3. Dessiner le graphe dual associé à chacun des graphes des figures 7.6 et 7.7 après avoir placé des sommets à tous les carrefours.

L'expérience montre que toutes les cartes semblent 4-face-colorables et 4 couleurs sont en général nécessaires, comme le montrent les exemples de la figure 7.7.

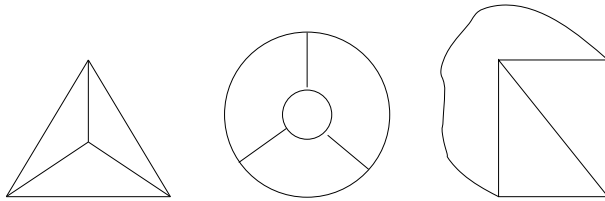


Figure 7.7 – Trois cartes nécessitant 4 couleurs.

Théorème 7.2.4 (APPEL et HAKEN, 1976). *Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe planaire. Alors Γ est 4-sommet-colorable.*

Avec pour conséquence immédiate (voir proposition 7.2.1) le célèbre résultat suivant.

Corollaire 7.2.5 (théorème des quatre couleurs). *Toute carte peut être coloriée avec 4 couleurs.*

Nous ne ferons pas la preuve de ce théorème : elle est longue, plusieurs dizaines de pages et très technique. L'idée de la démonstration est de ramener tous les graphes à un nombre fini de configurations : 1478 ; puis de les colorier grâce à un programme informatique. Une amélioration de cette preuve¹ a été donnée par N. ROBERTSON, D. SANDERS, P.D. SEYMOUR, R. THOMAS en 1997 .

1. N. ROBERTSON, D. SANDERS, P.D. SEYMOUR & R. THOMAS. The four-colour theorem, *J. Combin. Theory*, Series B 70 (1997), 2–44.

On a vu au chapitre 5 que K_4 est planaire mais K_5 ne l'est pas : cela laisse penser que 4 est bien le nombre minimum de couleurs recherché (il faut n couleurs pour colorier les sommets de K_n).

Pour finir avec les 4 couleurs, voici un théorème qui permet de restreindre le problème à une classe de graphes planaires particuliers.

Un graphe simple est cubique s'il est régulier de degré 3. Tout graphe simple planaire Γ tel que $\delta(\Gamma) \geq 3$ peut être transformé en un graphe simple planaire cubique de la manière suivante : soit σ un plongement à arêtes polygonales d'un graphe planaire.

- On prend un compas, on met la pointe sur un sommet $\sigma(x)$, on trace un cercle qui coupe toutes les arêtes incidentes à $\sigma(x)$ et seulement celles-ci.
- On met un nouveau sommet à chaque intersection du cercle avec une arête.
- On prend une gomme et on efface tout ce qu'il y a à l'intérieur du disque limité par le cercle.
- Chaque arc de cercle entre deux sommets nouveaux devient une nouvelle arête.
- On recommence le processus pour tous les sommets.

On obtient un graphe planaire connexe cubique. La figure 7.8 montre cette construction.

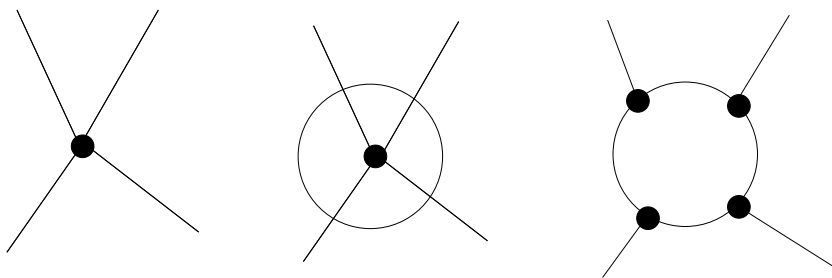


Figure 7.8 – Transformation cubique.

Théorème 7.2.6. *Pour prouver le théorème des quatre couleurs pour les graphes planaires simples connexes il est suffisant de prouver que chaque carte cubique est 4-face-colorable.*

Démonstration. Soit Γ une carte ; grâce à la construction ci-dessus on obtient une carte cubique qui est 4-face-colorable. Une 4-face-coloration

de Γ est ensuite obtenue en appliquant alors la transformation inverse de celle ci-dessus : on fusionne les sommets concernés. $\square$

On peut se demander ce qu'il se passe pour les graphes de genre $g \geq 1$ (voir § 5.6). Ainsi K_5 est de genre 1, et peut donc se plonger sur le tore $\mathbb{S}_1$: combien faut-il de couleurs pour colorier cette « carte torique » ? On démontre que 7 couleurs sont suffisantes pour colorier toutes les cartes dessinées sur un tore ; notamment, d'après les identités de RINGEL-YOUNGS (voir exemple 5.6.6, § 5.6) K_7 se plonge sur le tore et non K_8 , ce qui laisse penser que 7 est bien le nombre recherché (si K_n est plongé dans $\mathbb{S}_m$ il faut n couleurs pour sa sommet-coloration). D'ailleurs c'est un fait remarquable que pour la sommet-coloration de tous les graphes de genre g il suffit de $\lfloor \frac{7+\sqrt{1+48g}}{2} \rfloor$ couleurs (HEAWOOD, 1890).

7.3 Coloration des arêtes

C'est en quelque sorte la question « duale » de la coloration des sommets ; mais on va voir qu'elle se traite très différemment. Une **coloration des arêtes** d'un graphe $\Gamma = (V; E, N)$ est une application $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $f(a_1) \neq f(a_2)$ chaque fois que a_1 est incidente à a_2 . On appelle **k -arête-coloration** une coloration des arêtes avec k couleurs, *i.e.* $|f(E)| = k$ (c'est pourquoi souvent on prend $f(E) = \{1, 2, \dots, k\}$). S'il n'y a aucune ambiguïté on dira **k -coloration**. Ainsi une k -arête-coloration donne une partition des arêtes en k sous-ensembles. Le plus petit k tel que le graphe Γ admette une k -arête-coloration est appelé **indice chromatique**. On le notera $\chi'(\Gamma)$.

Un graphe Γ tel que $\chi'(\Gamma) \leq k$ est dit **k -arête-colorable**. On dira qu'une **couleur est incidente à un sommet** s'il existe une arête coloriée par cette couleur et qui est incidente à ce sommet.

La coloration est liée au degré maximum $\Delta(\Gamma)$ du graphe, comme on peut le voir ci-après.

Théorème 7.3.1 (KÖNIG, 1916). *Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe simple biparti. Alors $\chi'(\Gamma) = \Delta(\Gamma)$.*

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat lorsque Γ est connexe. Raisonnons par récurrence sur le nombre d'arêtes du graphe.

Si $m = |E| = 0$ ou 1, c'est trivial. Pour $m = 2$ le graphe formé de 2 arêtes et 3 sommets vérifie $\Delta = 2$ et $\chi' = 2$.

Supposons l'assertion vraie pour $|E| = m$ ($m \geq 2$) et soit $\Gamma = (V_1 \sqcup V_2; E)$ biparti à $m + 1$ arêtes.

Soit $a = \{x, y\}$ une arête de Γ , avec $x \in V_1, y \in V_2$. Alors par hypothèse de récurrence le graphe biparti $\Gamma' = \Gamma \setminus a$, obtenu en supprimant cette arête, admet une $\Delta(\Gamma')$ -arête-coloration ; comme $\Delta(\Gamma') \leq \Delta(\Gamma)$ il existe une coloration $\chi : E \setminus a \longrightarrow \mathbb{C}$ avec $\Delta(\Gamma)$ couleurs.

a) S'il existe une couleur c non incidente à x ni à y on colorie a avec cette couleur, d'où une coloration de Γ .

b) Sinon toute couleur est incidente à x ou y . Comme on a supprimé a on voit que $d_{\Gamma'}(x) < d_{\Gamma}(x) \leq \Delta(\Gamma)$, donc il existe une couleur c_1 non incidente à x ; de même il existe $c_2 \neq c_1$ non incidente à y ; il s'ensuit que c_1 est incidente à y et c_2 incidente à x (voir figure 7.9).

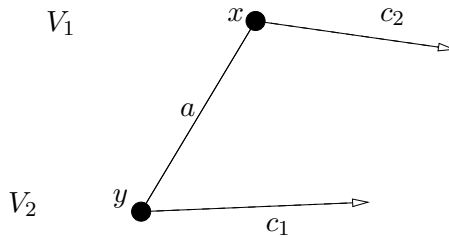


Figure 7.9 – Début de la construction pour le théorème de KÖNIG.

Soit maintenant $B = \Gamma'_{c_1, c_2}$ le sous-graphe de Γ' dont les arêtes sont les arêtes de Γ' coloriées avec les couleurs c_1 et c_2 , les sommets de B étant les extrémités de ces arêtes ; ainsi $x, y \in V(B)$; chaque sommet de B est de degré 1 ou 2, donc les composantes connexes de B sont des cycles (de longueur paire) ou des chaînes dont les arêtes sont coloriées alternativement par c_1 et c_2 . Par construction $d_B(x) = d_B(y) = 1$; la composante connexe C dans B contenant x est une chaîne élémentaire (sinon la couleur c_1 ou c_2 serait incidente deux fois à un sommet de C) ; s'il existait une chaîne de x à y , comme c_2 est incidente à x et c_1 est incidente à y elle serait de la forme $(x, c_2, x_1, c_1, \dots, x_n, c_1, y)$, utiliserait un nombre pair d'arêtes, donc un nombre impair de sommets, et comme B est biparti on aurait $y \in V_1$, ce qui n'est pas le cas. Ainsi la composante connexe C de x ne contient pas y et se termine en un sommet z auquel la couleur c_2 n'est pas incidente, par conséquent on peut échanger les couleurs c_1 et c_2 dans C : par cette opération c_2 n'est plus incidente à x et comme c_2 n'est pas incidente à y , on peut colorier a avec c_2 et obtenir une coloration de Γ . $\square$

Exercice 7.4. Définir la notion de graphe biparti pour un multi-graphe. Comment modifier la preuve ci-dessus dans ce cas ?

Théorème 7.3.2 (VIZING, 1964). *Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe simple. Alors :*

$$\Delta(\Gamma) \leq \chi'(\Gamma) \leq \Delta(\Gamma) + 1.$$

Démonstration. La première inégalité est évidente : soit x un sommet tel que $d(x) = \Delta(\Gamma)$. Il faudra au moins $\Delta(\Gamma)$ couleurs pour colorier les arêtes incidentes à x .

Pour démontrer la deuxième inégalité nous allons raisonner par récurrence sur le nombre d'arêtes. Si $|E| = 0, 1$ ou 2 , c'est trivial. Pour $|E| = 3$ et $\Gamma = K_3$ on a $\Delta = 2, \chi' = 3$; les autres cas sont aussi simples.

Supposons que notre assertion soit vraie pour $|E| = m$ ($m \geq 3$) et soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe avec $|E| = m + 1$ arêtes. Pour soulager les notations, nous noterons pour une arête $a = \{x, y\}, a = xy$. On fixe une arête $a = xy_1$; d'après l'hypothèse de récurrence on colorie (comme dans la preuve du théorème de KÖNIG) les arêtes de $\Gamma \setminus a$:

$$\chi : E \setminus a \longrightarrow \mathbb{C}$$

avec les couleurs $c_1, \dots, c_{\Delta+1}$ où $\Delta = \Delta(\Gamma)$.

Les degrés des sommets de $\Gamma \setminus a$ sont au maximum $\Delta(\Gamma)$ et on utilise $\Delta + 1$ couleurs pour colorier le graphe ; par conséquent il existe au moins une couleur non incidente à chaque sommet : **s'il manque une même couleur en x et y_1** , on colorie l'arête avec cette couleur et c'est fini. **Si les couleurs manquantes en x et y_1 sont différentes**, on construit une suite $(xy_1; c_1), (xy_2; c_2), (xy_3; c_3), \dots, (xy_k; c_k), k \geq 2$, vérifiant les conditions suivantes :

- a) c_i est une couleur manquante en y_i et l'arête $xy_{i+1}, 1 \leq i < k$ est coloriée avec la couleur c_i ;
- b) la suite ci-dessus est maximale, c'est-à-dire :
 - b₁) soit il n'y a pas d'arête incidente à x de couleur c_k (xy_{k+1} coloriée avec c_k n'existe pas),
 - b₂) soit la couleur c_k est déjà présente parmi les couleurs précédentes $c_1, \dots, c_{k-1}$ dans la suite.

Notons c la couleur manquante en x . Par hypothèse, d'après a) nous avons $c \neq c_i$ pour $1 \leq i \leq k - 1$. Deux cas se présentent :

Cas 1) **La couleur c_k n'est pas incidente à x .** On décale toutes les couleurs : l'arête xy_1 est coloriée avec la couleur c_1 , l'arête xy_2 est coloriée avec la couleur c_2 , l'arête xy_3 est coloriée avec la

couleur $c_3, \dots$, l'arête xy_k est coloriée avec la couleur c_k ; c'est possible puisque c_i n'est incidente ni à x ni à y_i par hypothèse et construction. On obtient donc une $(\Delta(\Gamma) + 1)$ -arête-coloration de Γ .

Cas 2) **La couleur c_k est incidente à x .** D'après b_2 , il existe un j tel que xy_j est coloriée avec c_k , par construction de la suite ci-dessus on a donc : $c_{j-1} = c_k$.

On décale également les couleurs : xy_i est coloriée avec la couleur c_i pour tout $i < j$. Pour $i > j$, xy_i reste avec la couleur c_{i-1} . L'arête xy_j n'a provisoirement pas de couleur.

On considère le sous-graphe B de Γ dont les arêtes sont de couleur c ou $c_k = c_{j-1}$ (rappelons que c est une couleur non incidente à x et $c_k = c_{j-1}$ non incidente à y_k); les sommets de B sont les extrémités des arêtes en question : chaque sommet de B est donc de degré 1 ou 2, de sorte que les composantes connexes de B sont soit des chaînes, soit des cycles (de longueur paire).

On a $d_B(x) = 1$ car c n'est pas incidente à x mais c_k est présente, $d_B(y_k) \leq 1$ car c_k n'est pas incidente à y_k mais c peut être incidente à y_k et $d_B(y_j) \leq 1$ car on a précisément supprimé la couleur de xy_j qui était $c_{j-1} = c_k$. On distingue deux cas :

a) **si x et y_j sont dans des composantes connexes de B différentes :**

- si $d_B(y_j) = 0$, c'est-à-dire si c est absente en y_j , alors il suffit de colorier xy_j avec c et c'est terminé,
- si $d_B(y_j) = 1$, c est donc incidente à y_j . La composante connexe de x dans B est une chaîne de couleurs alternées c et c_k qui finit en x , car $d_B(x) = 1$, avec la couleur c_k car c n'est pas incidente à x . La composante connexe de y_j est une chaîne finissant en y_j , car $d_B(y_j) = 1$, par une arête de couleur c . L'autre extrémité u de la chaîne étant incidente soit à c soit à c_k : l'une des couleurs c, c_k n'est donc pas incidente à u . Ainsi on peut échanger c et c_k dans cette dernière composante connexe. Les sommets x et y_j deviennent libres de la couleur c . Il suffit maintenant de colorier xy_j avec celle-ci;

b) **si x et y_j sont dans la même composante connexe de B ,** on finit de décaler les couleurs : xy_i est coloriée par c_i pour tout $1 \leq i \leq k-1$ et xy_k n'est pas coloriée. Notons que B n'est pas modifié dans cette opération et que l'arête xy_{j-1} reste bien sûr coloriée par la couleur $c_k = c_{j-1}$:

- si $d_B(y_k) = 0$, c'est-à-dire si c est absente en y_k , alors il suffit de colorier xy_k avec c et c'est terminé,
- si $d_B(y_k) = 1$, la composante connexe de y_k finit en y_k par une arête coloriée par c . Or y_j est dans la même composante connexe dans B que x . Cette composante connexe qui est une chaîne de x à y_j est différente de celle contenant y_k car $d(y_k) = 1$. Il suffit alors de permuter les couleurs c et c_k dans la composante connexe de y_k dans B et de colorier xy_k avec la couleur c . $\square$

Déterminer si $\chi'(\Gamma) = \Delta(\Gamma)$ ou $\Delta(\Gamma)+1$ est un problème $\mathcal{NP}$ -complet. Néanmoins la preuve ci-dessus est effective : il est donc possible de fabriquer un algorithme qui colorie les arêtes de Γ avec au plus $\Delta + 1$ couleurs. Ce théorème divise les graphes simples en deux classes : la **classe 1** contient les graphes tels que $\chi' = \Delta$ et la **classe 2** contient ceux qui vérifient $\chi' = \Delta+1$. Des exemples sont fournis par la proposition suivante.

Proposition 7.3.3. *Soit $n \geq 2$.*

- i) *Si n est impair, K_n est de classe 2 : $\chi'(K_n) = n = \Delta(K_n) + 1$.*
- ii) *Si n est pair, K_n est de classe 1 : $\chi'(K_n) = n - 1 = \Delta(K_n)$.*

Démonstration.

i) Supposons n impair. K_n n'est pas $(n-1)$ -arête-colorable : le nombre maximum de paires de sommets ayant une intersection vide est égal à $\frac{n-1}{2}$, donc le nombre maximum d'arêtes de la même couleur est $\frac{n-1}{2}$, puis

$$|E(K_n)| = \binom{n(n-1)}{2} \leq \frac{n-1}{2} \chi'(K_n),$$

d'où $\chi'(K_n) \geq n$ puis $\chi'(K_n) = n$ par le théorème de VIZING. Comme $2|E| = \sum_{x \in V} d(x) = n(n-1) = \chi'(K_n)(n-1)$ on en déduit que chaque couleur est incidente à exactement $n-1$ sommets de K_n et donc qu'il y a une bijection entre les n couleurs de cette coloration des arêtes correspondant à $\chi'(K_n)$ et les n sommets de K_n .

ii) Supposons n pair : on colorie le sous-graphe K_{n-1} selon i) avec $n-1$ couleurs ; le sommet restant x est adjacent aux $n-1$ sommets de K_{n-1} ; chacun de ces sommets étant de degré $n-2$ dans K_{n-1} , il manque une couleur incidente à ce sommet ; cette couleur manquante est différente pour tous les sommets de K_{n-1} (cela découle de l'observation ci-dessus), on l'utilise pour toutes les arêtes entre x et les sommets de K_{n-1} . $\square$

On peut aussi faire une preuve directe de i) sans utiliser le théorème de VIZING.

Exercice 7.5.

- i) On représente K_n , n impair, par les sommets d'un polygone régulier, notés $0, 1, 2, \dots, n-1$ (modulo n) ; chaque arête $\{k, l\}$ est représentée par le segment $\llbracket k, l \rrbracket$. On colorie les arêtes du bord $\{k, k+1\}$, $0 \leq k \leq n-1$ par les couleurs c_k , $0 \leq k \leq n-1$. Montrer que toute arête $\{i, i+\lambda\}$ de K_n est parallèle à une arête $\{k, k+1\}$.

Indication : $\{i, j\}$ est parallèle à $\{i-1, j+1\}$ (modulo n) ; on aura à résoudre une équation du premier degré dans l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, qui a une solution car, n étant impair, 2 est inversible dans cet anneau (concrètement si $n = 2m - 1$ l'inverse de 2 est m). Conclure que $\chi'(K_n) = n$.

La figure 7.10 illustre cette méthode pour $n = 5$.

- ii) Pourquoi la technique ci-dessus échoue-t-elle lorsque n est pair ?

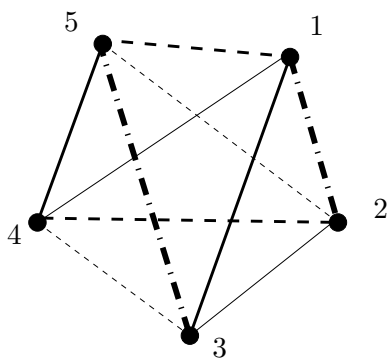


Figure 7.10 – Coloration des arêtes de K_5 .

Exercice 7.6. Déterminer les indices chromatiques des graphes de la figure 7.11.

7.4 Morphismes de graphes

La notion de morphisme s'adresse à tous les graphes : simples ou non, avec ou sans boucle.

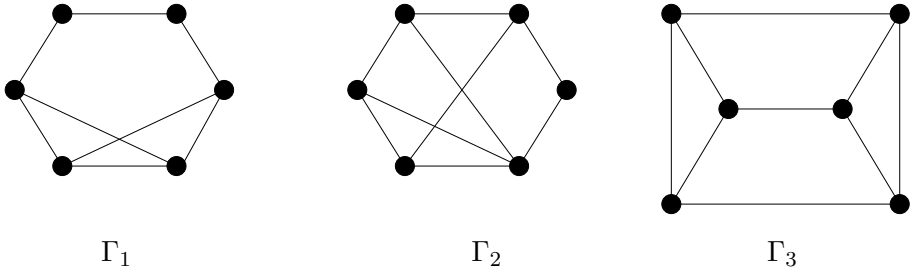


Figure 7.11 – Indices chromatiques.

Soient $\Gamma = (V; E, N)$ et $\Gamma' = (V'; E', N')$ deux graphes. Un **homomorphisme** ou **morphisme** $f : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$ est une application $f :$

$$f : V \sqcup E \longrightarrow V' \sqcup E'$$

vérifiant :

- $f(V) \subseteq V'$;
- $f(E) \subseteq E'$;
- si $a \in E$ est incidente à $x \in V$, alors $f(a) \in E'$ est incidente à $f(x)$.

Cette **propriété d'incidence** se traduit par : si $a = ([x, y], n) \in E$, il existe $n' \in N'$ tel que $f(a) = ([f(x), f(y)], n') \in E'$.

On peut aussi utiliser les fonctions d'incidence $\varepsilon, \varepsilon'$; la propriété d'incidence se traduit alors par la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ \downarrow \varepsilon & & \downarrow \varepsilon' \\ P_2(V) & \xrightarrow{f} & P_2(V') \end{array} \quad \varepsilon' \circ f = f \circ \varepsilon$$

On voit qu'une multi-arête peut devenir simple, une boucle reste une boucle ; lorsque Γ' est simple, la donnée de $f|_V$ avec la propriété d'incidence suffit à déterminer f .

Exercice 7.7.

- i) Montrer que le composé de deux morphismes est un morphisme.
- ii) Montrer que Id_Γ , l'application identique de Γ , est un morphisme.

- iii) Soient $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe et $\Gamma' = (V'; E')$ un graphe simple ; on suppose que $\varphi : V \longrightarrow V'$ vérifie la propriété d'incidence ; montrer qu'il existe un unique morphisme $f : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$ tel que $f|_V = \varphi$.

Soit $f : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$ un morphisme ; si $\Delta = (V; E, N)$ est un sous-graphe de Γ , on définit le **graphe image** de Γ par f , noté $f(\Delta)$, comme le sous-graphe de Γ' dont l'ensemble des sommets est $f(V)$ et l'ensemble des arêtes est $f(E)$. Comme pour la conservation de la connexité dans les espaces topologiques par les applications continues, on peut établir le résultat suivant.

Exercice 7.8. Soient $f : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$ un morphisme et Δ un sous-graphe de Γ ; démontrer que si Δ est connexe, $f(\Delta)$ est connexe.

On dit qu'un morphisme $f : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$ est un **isomorphisme** s'il existe un morphisme $g : \Gamma' \longrightarrow \Gamma$ tel que $f \circ g = \text{Id}_{\Gamma'}$ et $g \circ f = \text{Id}_{\Gamma}$.

Exercice 7.9.

- i) Montrer que si

$$f : \Gamma = (V; E, N) \longrightarrow \Gamma' = (V'; E', N')$$

est un isomorphisme, on a :

- $f|_V : V \longrightarrow V'$ est bijective et
- $f|_E : E \longrightarrow E'$ est bijective.

- ii) Réciproquement, si $f|_V$ et $f|_E$ sont bijectives et si $\varepsilon' \circ f = f \circ \varepsilon$, montrer que f est un isomorphisme.

Cette dernière propriété montre la cohérence de ces définitions avec la notion d'isomorphisme introduite au § 1.9.

On voit ainsi que si f est un **morphisme injectif**, *i.e.* $f|_V$ et $f|_E$ injectives, f réalise un isomorphisme entre Γ et $f(\Gamma)$; on dit aussi que f est un **plongement** ou **une immersion**.

Nous pouvons illustrer ces notions en interprétant le nombre $\omega(\Gamma)$ (voir § 1.1.3) cardinal maximum d'une clique de la façon suivante : Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe avec $|V| = n$ et $|E| = m$. On définit le graphe complet à t sommets, $t \geq 1$, $K_t = (W; A)$ par $W = \{1, 2, \dots, t\}$ et $A =$ l'ensemble de toutes les parties à deux éléments de W si $t \geq 2$, $A = \emptyset$ si $t = 1$; alors $\omega(\Gamma)$ est le plus grand entier t pour lequel il existe un plongement de K_n dans Γ .

7.4.1 Quotients de graphe

Comme en topologie, la notion de quotient correspond à l'idée de collage, dont on rend compte avec les relations d'équivalence : si $\mathcal{R}$ est une équivalence sur X et $\mathcal{R}(x)$ désigne la classe de x , dans l'ensemble quotient $X/\mathcal{R}$ tous les éléments de $\mathcal{R}(x)$ sont recollés en un seul élément. Soit donc $\Gamma = (V; A, \varepsilon)$ un graphe (voir § 1.8) ; on recolle les sommets entre eux, les arêtes entre elles, mais il faut que ces recollements soient cohérents, d'où la définition :

soit $\mathcal{R}$ une équivalence sur $V \sqcup A$ telle que

– $\mathcal{R}|_{V \times V} = \mathcal{R}_V$ est une équivalence sur V ;

– $\mathcal{R}|_{A \times A} = \mathcal{R}_A$ est une équivalence sur A .

On demande que cette équivalence soit *compatible*, c'est-à-dire que si $a\mathcal{R}_A a'$, les extrémités $\varepsilon(a)$ sont « équivalentes » à celles de $\varepsilon(a')$, dans le sens précis suivant : si $\varepsilon(a) = [x, y]$ et $\varepsilon(a') = [x', y']$, on a :

soit $x\mathcal{R}_V x'$ et $y\mathcal{R}_V y'$,

soit $x\mathcal{R}_V y'$ et $y\mathcal{R}_V x'$

(cela vaut encore lorsque a ou a' sont des boucles).

On définit $\Gamma/\mathcal{R} = (\overline{V}; \overline{A}, \overline{\varepsilon})$ par :

– $\overline{V} = V/\mathcal{R}_V$;

– $\overline{A} = A/\mathcal{R}_A$;

– $\overline{\varepsilon}$: soit $\overline{a} = \mathcal{R}_A(a)$ (*i.e.* la classe de a) avec $\varepsilon(a) = [x, y]$; on pose $\overline{\varepsilon}(\overline{a}) = [\mathcal{R}_V(x), \mathcal{R}_V(y)]$.

Il est facile de voir (voir exercice 7.10 ci-dessous) que $\overline{\varepsilon}$ est bien définie ; $\Gamma/\mathcal{R}$ est appelé **graphe quotient de Γ par $\mathcal{R}$** . De plus l'application $p : \Gamma \longrightarrow \Gamma/\mathcal{R}$ définie par

– $p(x) = \mathcal{R}_V(x)$, $x \in V$ et

– $p(a) = \mathcal{R}_A(a)$, $a \in A$,

est un morphisme surjectif de graphes : $\overline{\varepsilon} \circ p = p \circ \varepsilon$.

Exercice 7.10.

i) Montrer que $\overline{\varepsilon}$ est bien définie.

ii) Montrer que $\overline{\varepsilon} \circ p = p \circ \varepsilon$.

iii) Soit $\Gamma = (V; A, \varepsilon)$ avec $V = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{a, a', b, b', b'', c, d, e, f\}$ avec $\varepsilon(a) = \varepsilon(a') = \varepsilon(d) = \{1, 2\}$, $\varepsilon(b) = \varepsilon(b') = \varepsilon(b'') = \{2, 3\}$, $\varepsilon(c) = \{1, 4\}$, $\varepsilon(e) = \{1, 3\}$, $\varepsilon(f) = \{3, 4\}$.

Montrer que l'équivalence $\mathcal{R}$ qui « colle » 1 à 3, a à a' , b à b' et b'' à d est compatible ; dessiner Γ et $\Gamma/\mathcal{R}$.

7.4.2 Morphismes et quotients de graphes simples

1. Il faut d'abord adapter la notion de morphisme, car si Γ et Γ' sont simples, il se peut que $\text{Hom}(\Gamma, \Gamma')$ soit très petit (à cause de l'absence de boucle) ; de plus dans les graphes simples l'information est réduite à adjacence ou non-adjacence. On dira que $f : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$ est un morphisme si :

- i) $f : V \longrightarrow V'$ est une application ;
- ii) si $x, y \in V$ sont adjacents :
 - ou bien $f(x) = f(y)$,
 - ou bien $f(x)$ et $f(y)$ sont adjacents.

2. Pour le quotient on construit $\Gamma/\mathcal{R}$ comme pour les multigraphes ; ce graphe peut avoir des boucles et des arêtes multiples : on supprime les boucles et on « unifie » les multi-arêtes. On vérifie que l'application canonique p est un morphisme de graphes simples.

Cela revient à admettre qu'un sommet est adjacent à lui-même.

Exercice 7.11. Montrer que si $m \geq n$ alors K_n et C_n sont des quotients de K_m et C_m respectivement.

Exercice 7.12.

- i) Soit $\Gamma = (V; E)$ avec $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $E = \{12, 23, 34, 45, 56, 61\}$ (kl « code » l'arête $\{k, l\}$). Montrer que les graphes quotients obtenus en recollant 23 et 45 des deux façons possibles : $2 \equiv 4$, $3 \equiv 5$ ou bien $2 \equiv 5$, $3 \equiv 4$, ne sont pas isomorphes.
- ii) Même question avec

$$V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \quad \text{et} \quad E = \{01, 12, 23, 34, 45, 56, 67\}$$

en recollant 12 et 56.

Exercice 7.13. Soit $L_\infty = (V; E)$ avec $V = \mathbb{Z}$, $E = \{(k, k+1) ; k \in \mathbb{Z}\}$ (chaîne infinie) et $n \geq 3$ fixé ; soit $\mathcal{R}$ l'équivalence définie par $u\mathcal{R}v$ si et seulement si $n \mid (u - v)$ dans $\mathbb{Z}$. Montrer que $L_\infty/\mathcal{R} \simeq C_n$.

7.4.3 Morphismes et coloration

La k -sommet-coloration est liée à la notion de morphisme par la proposition suivante.

Proposition 7.4.1. Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe sans boucle.

- i) Si $f : V \longrightarrow \{1, \dots, k\}$ est une k -sommets-coloration de Γ , alors f se prolonge en un morphisme $\tilde{f} : \Gamma \longrightarrow K_k$ (K_k graphe complet à k sommets).
- ii) Réciproquement si $f : \Gamma \longrightarrow K_k$ est un morphisme, $f|_V : V \longrightarrow \{1, \dots, k\}$ est une k -sommets-coloration de Γ .

Démonstration.

i) Soit $a = ([x, y], n) \in E$, alors on a : $f(x) \neq f(y)$ ce qui entraîne que $\{f(x), f(y)\}$ est une arête de K_k ; on pose $\tilde{f}(a) = \{f(x), f(y)\}$, cela définit bien un morphisme.

ii) Si x et y sont adjacents, il existe une arête $a = ([x, y], n) \in E$, donc $\tilde{f}(a)$ est une arête de K_k , incidente à $f(x)$ et $f(y)$, ce qui entraîne que $f(x) \neq f(y)$; $f|_V$ est bien une k -sommets-coloration. $\square$

Corollaire 7.4.2. Si $f : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$ est un morphisme de graphes sans boucle, alors $\chi(\Gamma) \leq \chi(\Gamma')$.

Démonstration. Supposons que $\chi(\Gamma') = k$, d'où une k -sommets-coloration de Γ' . Par la proposition 7.4.1, on peut voir cette k -sommets-coloration comme un morphisme $h : \Gamma' \longrightarrow K_k$; mais alors $h \circ f$ est une k -sommets-coloration de Γ . D'où $\chi(\Gamma) \leq \chi(\Gamma')$. $\square$

Soit $f : V \longrightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ une k -sommets-coloration d'un graphe sans boucle $\Gamma = (V; E, N)$. On peut associer à f une partition de V :

$$V = \bigsqcup_{i \in f(V)} f^{-1}(i) \quad (\text{on ne prend que les } f^{-1}(i) \text{ qui sont non vides}).$$

Il est aisé de vérifier que les ensembles $f^{-1}(i)$ sont des ensembles indépendants (car Γ est sans boucle). Réciproquement, à chaque partition de V en ensembles indépendants $V = V_1 \sqcup V_2 \sqcup \dots \sqcup V_k$, on peut associer une k -sommets-coloration en assignant la couleur i à tous les sommets de V_i .

Plus généralement, soit un morphisme $f : \Gamma_1 = (V_1; E_1, N_1) \longrightarrow \Gamma_2 = (V_2; E_2, N_2)$, où Γ_2 est sans boucle ; la partition $V_1 = \sqcup_{y \in V_2} f^{-1}(y)$ est constituée d'ensembles indépendants (car Γ_2 est sans boucle), de sorte que Γ_1 est k -parti, $k = |f(V_1)|$. Cette partition peut être interprétée comme une sorte de noyau. Pour cela étudions la situation générale suivante : soit $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe et $\mathcal{R}$ une équivalence sur V ; on note $\Gamma/\mathcal{R} = (\overline{V}; \overline{E}, \overline{N})$ le graphe quotient et $p : \Gamma \longrightarrow \Gamma/\mathcal{R}$ la surjection canonique. Alors on a la « proposition universelle du quotient ».

Théorème 7.4.3. *Pour tout morphisme $f : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$ constant sur les classes modulo $\mathcal{R}$ (i.e. $x\mathcal{R}y \Rightarrow f(x) = f(y)$), il existe un unique morphisme $\tilde{f} : \Gamma/\mathcal{R} \longrightarrow \Gamma'$ tel que $\tilde{f} \circ p = f$:*

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{p} & \Gamma/\mathcal{R} \\ & \searrow f & \downarrow \tilde{f} \\ & & \Gamma' \end{array}$$

Démonstration. L'existence et l'unicité de $\varphi : V/\mathcal{R} \longrightarrow V(\Gamma')$ vérifiant $\varphi \circ p|_V = f|_V$ sont immédiates. Il reste à définir $\psi : \overline{E} \longrightarrow E(\Gamma') : si $a = ([\mathcal{R}(x), \mathcal{R}(y)], e) \in E(\Gamma/\mathcal{R})$ on pose $\psi(a) = f(e)$; on a bien $\psi \circ p|_E = f|_E$; en prenant $\tilde{f}|_{\overline{V}} = \varphi$ et $\tilde{f}|_{\overline{E}} = \psi$, on obtient $\tilde{f} \circ p = f$. $\square$$

Appliquons ce théorème à la situation suivante : soit Γ et Γ' deux graphes simples et soit $f : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$ un morphisme; considérons l'équivalence associée à $f : x\mathcal{R}_f y$ si et seulement si $f(x) = f(y)$; d'après le théorème 7.4.3 il existe un unique $g = \tilde{f}$ tel que $g \circ p = f$; de plus ici $g|_{\overline{V}}$ et $g|_{\overline{E}}$ sont injectives (le démontrer). Mais alors $\Gamma/\mathcal{R}_f$ est isomorphe à $f(\Gamma)$, montrant que $\mathcal{R}_f$ joue bien le rôle de $\text{Ker}(f)$ qui est le **noyau** du morphisme f ; et les classes modulo $\mathcal{R}_f$ sont les $f^{-1}(y)$: indépendants de Γ .

7.5 Graphes parfaits

Dans ce paragraphe on supposera que les graphes sont simples. Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe. L'**indice de partition par cliques** est le nombre minimum de cliques qu'il faut pour partitionner l'ensemble des sommets. On le note $\theta(\Gamma)$.

On a $\theta(C_4) = 2$ et $\theta(C_5) = 3$ (le vérifier).

Il existe des relations entre les paramètres ω (cardinal maximum d'une clique), χ (nombre chromatique), θ et α (cardinal maximum d'un ensemble stable).

Lemme 7.5.1. *Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe simple. On a :*

$$\chi(\Gamma) \geq \omega(\Gamma), \quad \alpha(\Gamma) \leq \theta(\Gamma),$$

$$\alpha(\Gamma) = \omega(\overline{\Gamma}), \quad \theta(\Gamma) = \chi(\overline{\Gamma}).$$

Démonstration. Laissée au lecteur. $\square$

Il se peut que χ soit beaucoup grand que ω : P. ERDŐS a montré par des méthodes probabilistes (non effectives) le résultat suivant.

Théorème 7.5.2 (ERDŐS). *Soient $g \geq 3$ et $k \geq 2$ deux entiers naturels : il existe un graphe Γ d'ordre k^{3g} tel que $\mu(\Gamma) \geq g$ ($\mu(\Gamma)$ est la maille de Γ) et $\chi(\Gamma) \geq k$.*

Les graphes parfaits sont à l'opposé de cette situation : un graphe est dit **parfait** si pour chaque sous-graphe induit Γ' de Γ on a $\chi(\Gamma') = \omega(\Gamma')$, c'est-à-dire que le nombre trivialement nécessaire $\omega(\Gamma')$ de couleurs pour colorier Γ' est aussi suffisant.

Soit Γ un graphe quelconque tel que $\chi(\Gamma) \leq k$. Est-il possible de colorier de manière effective Γ avec k couleurs ? Ce problème est $\mathcal{NP}$ -complet pour $k \geq 3$ (étudier ce qui se passe pour $k = 2$). Il est dans la classe $\mathcal{P}$ si le graphe est parfait (*i.e.* il existe un algorithme polynomial qui résout le problème ci-dessus).

Les graphes parfaits ont été introduits par C. BERGE qui a proposé la conjecture suivante.

Conjecture 7.5.3 (conjecture du graphe parfait). *Un graphe est parfait si et seulement si son complémentaire est parfait.*

Cette conjecture a été démontrée par L. LOVÁSZ.

Théorème 7.5.4 (théorème du graphe parfait, LOVÁSZ, 1972). *Un graphe simple $\Gamma = (V; E)$ est parfait si et seulement si son complémentaire $\bar{\Gamma}$ est parfait.*

Démonstration. Nous ne ferons pas cette preuve délicate. □

Rappelons que C_n désigne le cycle de longueur n . On observe que $\chi(C_3) = \omega(C_3) = 3$, mais si $n \geq 5$ est impair, on a $\chi(C_n) = 3 > \omega(C_n) = 2$: si un graphe, ou son complémentaire, contient un tel cycle C_n , il ne peut donc être parfait (d'après le théorème de LOVÁSZ). Est-ce la seule obstruction ? C'est l'audacieuse conjecture suivante.

Conjecture 7.5.5 (conjecture forte du graphe parfait). *Un graphe est parfait si et seulement si ni lui, ni son complémentaire ne contiennent de cycle de longueur impaire ≥ 5 .*

Émise par C. BERGE en 1966, cette conjecture a été démontrée en 2002 par CHUDNOVSKY, ROBERTSON, SEYMOUR et THOMAS.

Exercice 7.14. Montrer que les graphes bipartis sont des graphes parfaits.

Voici une autre classe de graphes parfaits : un **graphe de comparabilité** est un graphe associé à une relation de préordre (réflexive et transitive) de la façon suivante :

soit $\leq$ un préordre sur l'ensemble X ; on définit le graphe simple $\Gamma = (V; E)$ en prenant :

- $V = X$;
- $\{x, y\} \in E$ si et seulement si $x \leq y$ ou $y \leq x$ (*i.e.* x et y sont distincts et comparables).

Exemple 7.5.6. Le graphe représenté en figure 7.12 n'est pas un graphe de comparabilité : quel que soit l'ordre choisi sur les sommets du triangle, l'une des arêtes adjacentes à ce triangle ne pourra être orientée correctement : il manquera l'arête de transitivité.

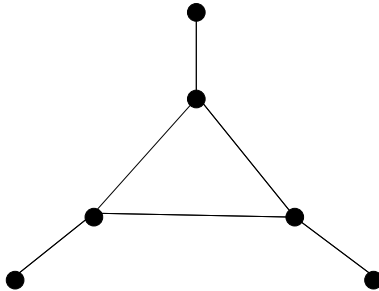


Figure 7.12 – Un graphe qui n'est pas un graphe de comparabilité.

Théorème 7.5.7. *Les graphes de comparabilité sont parfaits.*

Démonstration. Comme tout sous-graphe induit d'un graphe de comparabilité est de comparabilité, il suffit de voir que $\chi(\Gamma) = \omega(\Gamma)$ pour un graphe de comparabilité $\Gamma = (V; E)$ associé au préordre $\leq$:

soit $x \in V$, notons $r(x)$ le plus grand entier r pour lequel il existe r sommets x_i , $i = 1, \dots, r$, tels que $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_r = x$. Notons que la transitivité de $\leq$ implique que le sous-graphe induit par les sommets x_i est complet, donc c'est une clique de Γ . Soit $k = \max_x r(x)$ et $y \in V$ tel que $r(y) = k$. La taille d'une clique maximum est donc $\omega(\Gamma) = k$ et l'application

$$r : V \longrightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$$

est une coloration de Γ : si $x \leq y$ il est clair que $r(x) < r(y)$, donc si $\{x, y\} \in E$ on a $r(x) \neq r(y)$. Ainsi $\chi(\Gamma) \leq \omega(\Gamma)$ puis $\chi(\Gamma) \leq \omega(\Gamma)$ par le lemme 7.5.1. $\square$

Remarque 7.5.8. Dans un graphe de comparabilité seules les « chaînes ordonnées » de longueur k induisent une clique de taille k .

Soit $\{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ un ensemble d'intervalles de $\mathbb{R}$. On lui associe un graphe simple $\Gamma = (V; E)$:

- $V = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$;
- pour $i \neq j$, $\{I_i, I_j\} \in E$ si et seulement si $I_i \cap I_j \neq \emptyset$.

Ce graphe est appelé **graphe d'intervalles**.

Proposition 7.5.9. *Le complémentaire d'un graphe d'intervalles est un graphe de comparabilité.*

Démonstration. Définissons un préordre sur $V = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ de la manière suivante :

$$I_i \leq I_j \text{ si et seulement si } i = j \text{ ou } \forall x \in I_i, \forall y \in I_j : x < y.$$

Ce préordre fournit un graphe de comparabilité $\Delta = (V; E')$. Soit $i \neq j$:

- si $\{I_i, I_j\} \in E'$ on a $I_i \leq I_j$ ou $I_j \leq I_i$ donc $I_i \cap I_j = \emptyset$ et $\{I_i, I_j\} \notin E$;
- si $\{I_i, I_j\} \notin E'$, alors $I_i \cap I_j \neq \emptyset$; comme $\mathbb{R}$ est totalement ordonné, on a $\forall x \in I_i, \forall y \in I_j, x < y$ ou le contraire, *i.e.* $I_i \leq I_j$ ou $I_j \leq I_i$ d'où $\{I_i, I_j\} \in E'$; donc $\bar{\Gamma} = \Delta$ est un graphe de comparabilité. $\square$

Corollaire 7.5.10. *Les graphes d'intervalles sont des graphes parfaits.*

Démonstration. D'après le théorème 7.5.4, le théorème 7.5.7 et la proposition 7.5.9. $\square$

Remarques algorithmiques. La détermination des invariants $\omega(\Gamma)$, $\chi(\Gamma)$ et $\alpha(\Gamma)$ d'un graphe Γ est un problème $\mathcal{NP}$ difficile. Cela signifie que tout problème $\mathcal{NP}$ peut se réduire de manière polynomiale au calcul d'un des paramètres ci-dessus (voir § 1.7.3). Donc il est peu probable (excepté si $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$) que des algorithmes polynomiaux existent pour calculer ω , χ et α . Or tous ces paramètres peuvent être calculés en temps polynomial pour les graphes parfaits, ce qui rend cette classe extrêmement intéressante du point de vue algorithmique. Davantage de détails sur ces graphes et sur l'algorithmique associée peuvent être trouvés dans [1].

7.6 Coloration par listes

La coloration par listes est une version plus générale de la coloration des sommets : on a toujours une couleur par sommet mais celle-ci est prise dans une liste de couleurs associée au sommet.

Pour chaque sommet x d'un graphe $\Gamma = (V; E, N)$, soit $L(x)$ une liste de k couleurs disponibles au sommet x . Une **coloration par listes** est une coloration χ telle que $\chi(x)$ est choisi dans $L(x)$.

Un graphe est **k -liste-colorable** si pour toute famille $L(x)_{x \in V}$ d'ensembles à k éléments ($|L(x)| = k$), il existe une coloration des sommets χ tel que pour tout x , $\chi(x) \in L(x)$. Le plus petit entier k tel que Γ est k -liste-colorable est appelé **nombre chromatique par listes** de Γ . Il est noté $\chi_\ell(\Gamma)$.

On peut définir de la même manière la notion de coloration par listes des arêtes. On notera $\chi'_\ell(\Gamma)$ l'**indice chromatique par listes**.

Il est clair que $\chi_\ell(\Gamma) \geq \chi(\Gamma)$: une k -coloration revient à choisir, pour tout x , $L(x) = \{1, 2, \dots, k\}$. De même $\chi'_\ell(\Gamma) \geq \chi'(\Gamma)$.

Exemple 7.6.1. Le nombre chromatique de $K_{2,2}$ est égal à 2 (c'est un graphe biparti) et son nombre chromatique par liste est égal à 2 (voir figure 7.13).

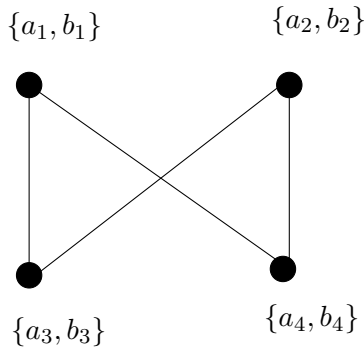
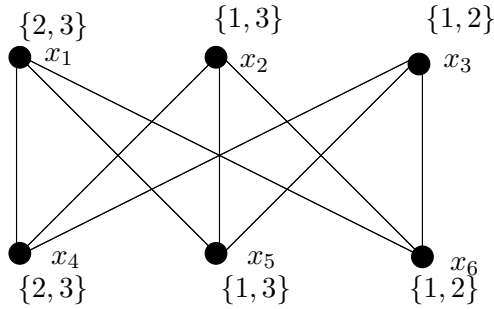
Si $\{a_1, b_1\} \cap \{a_2, b_2\} \neq \emptyset$ ou $\{a_3, b_3\} \cap \{a_4, b_4\} \neq \emptyset$, on suppose par exemple que $a_1 = a_2$ et on colore les sommets supérieurs (sommets du haut dans la figure) avec a_1 . Pour les sommets inférieurs (sommets du bas), il suffit de prendre une couleur différente de a_1 (il en existe au moins une dans chaque liste).

Si $\{a_1, b_1\} \cap \{a_2, b_2\} = \emptyset$ et $\{a_3, b_3\} \cap \{a_4, b_4\} = \emptyset$, on peut supposer que $\{a_1, b_1, a_2, b_2\} = \{a_3, b_3, a_4, b_4\}$ quitte à remplacer des couleurs des sommets inférieurs par des couleurs déjà présentes dans les listes des sommets supérieurs. On se retrouve, quitte à échanger les rôles des deux sommets inférieurs et des couleurs dans chaque liste, avec deux configurations possibles :

- $(a_1, b_1) = (a_3, b_3)$ et $(a_2, b_2) = (a_4, b_4)$: on colorie respectivement les quatre sommets avec respectivement a_1, a_2, b_1, b_2 ;
- $(a_1, a_2) = (a_3, a_4)$ et $(b_1, b_2) = (b_3, b_4)$: on colorie les quatre sommets avec respectivement a_1, a_2, b_2, b_1 .

Exemple 7.6.2. On a $\chi(K_{3,3}) = 2$ (c'est un graphe biparti), mais le choix des listes indiqué à la figure 7.14 montre que $\chi_\ell(K_{3,3}) \geq 3 > \chi(K_{3,3})$.

Un résultat important est fourni par le théorème suivant.

Figure 7.13 – Nombre chromatique par listes de $K_{2,2}$.Figure 7.14 – Nombre chromatique par listes de $K_{3,3}$.

Théorème 7.6.3 (THOMASSEN, 1994). *Tout graphe planaire est 5-liste-colorable.*

Concernant l'indice chromatique par listes, la situation semble moins compliquée comme veut bien l'indiquer la conjecture suivante.

Conjecture 7.6.4 (conjecture de la coloration des arêtes par listes). *Tout graphe simple $\Gamma = (V; E)$ vérifie $\chi'_\ell(\Gamma) = \chi'(\Gamma)$.*

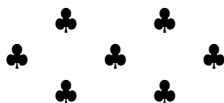
Cette conjecture a été prouvée seulement pour les graphes bipartis.

Théorème 7.6.5 (GALVIN, 1995). *Pour tout graphe simple biparti $\Gamma = (V; E)$ on a*

$$\chi'_\ell(\Gamma) = \chi'(\Gamma).$$

Pour finir ce chapitre nous donnons une application de la coloration par listes à la téléphonie : pour éviter les interférences en téléphonie

mobile il est nécessaire que les fréquences allouées par les relais téléphoniques qui recouvrent un même territoire soient choisies de telle sorte qu'une fréquence ne soit pas utilisée simultanément par deux relais recouvrant le même territoire. On modélise le problème de la manière suivante : les relais sont les sommets du graphe, on met une arête entre deux relais si ceux-ci recouvrent une même portion de territoire. Chaque relais a un nombre fixé k de fréquences disponibles distinctes. Ainsi chaque sommet possède une liste $L(x) = \{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ de couleurs. À chaque instant il faut s'assurer de ce que, si le sommet x s'est vu allouer la fréquence i (c'est-à-dire si x est colorié par i), alors ses sommets voisins ne peuvent recevoir cette fréquence (chaque voisin doit être colorié avec une couleur prise dans sa liste) : nous sommes ainsi confrontés à un problème de coloration par listes.



Chapitre 8

Couplage et factorisation

Soit un ensemble de jeunes filles : chacune d'entre elles connaît un certain nombre de garçons ; à quelles conditions chacune des jeunes filles peut-elle se marier avec un garçon qu'elle connaît ?

Dans une entreprise ayant un nombre t d'employés, il y a k postes de travail pour fabriquer un objet ; chaque employé est compétent pour au moins un poste de travail ; est-il possible d'affecter chaque personne à un poste pour lequel il est qualifié ?

Ce type de problème connu sous le nom du **problème des mariages** a été résolu par P. HALL en 1935. Un couplage dans un graphe est un ensemble d'arêtes deux à deux non incidentes. Déterminer un couplage de cardinal maximum est une question qui apparaît souvent en combinatoire, en ingénierie, en optimisation... Les deux problèmes ci-dessus peuvent être modélisés par la recherche d'un couplage maximum dans un graphe biparti. De manière plus générale on peut définir la k -factorisation d'un graphe qui généralise la notion de couplage. D'autres questions telles que : le cardinal maximum d'un ensemble indépendant, trouver un ensemble de sommets recouvrants ou un ensemble d'arêtes recouvrantes, sont liées aux problèmes de couplage. Ce chapitre se propose d'étudier ces notions. **Les graphes sont supposés d'ordre fini et généralement simples et sans sommet isolé.**

8.1 Définitions et premières propriétés

Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe. Rappelons qu'un sous-ensemble de sommets S de V est un **ensemble indépendant** (ou simplement un **indépendant**) ou **ensemble stable** (ou simplement un **stable**) si deux

sommets de S ne sont jamais adjacents. Un stable S est dit **stable maximum** si pour tout stable S' on a $|S'| \leq |S|$. Le cardinal d'un stable maximum, appelé **nombre de stabilité**, sera noté $\alpha(\Gamma)$.

Remarque 8.1.1. Un stable maximum est maximal parmi les stables, en ce sens que si $S \subset S'$, S' stable, alors $S' = S$; mais un stable maximal n'est pas nécessairement de cardinal maximum.

À l'opposé, une partie T de V est un ensemble **transversal** (ou simplement **un transversal**) si toute arête de Γ est incidente à un sommet de T , c'est-à-dire $\forall a \in E, \varepsilon(a) \cap T \neq \emptyset$; un **transversal minimum** est un transversal de cardinal minimum; ce cardinal est noté $\beta(\Gamma)$ et appelé du graphe Γ **nombre de transversalité**.

On peut faire une description analogue de ces notions, mais du point de vue des arêtes.

Un **couplage** C dans un graphe Γ est un ensemble stable d'arêtes, c'est-à-dire que deux arêtes quelconques de C ne sont pas incidentes : $\forall a, a' \in C, \varepsilon(a) \cap \varepsilon(a') = \emptyset$; le couplage C est un **couplage maximum** si pour tout couplage C' de Γ , on a $|C'| \leq |C|$ (un tel couplage est notamment maximal, au sens de l'inclusion); le cardinal d'un couplage maximum est noté $\alpha'(\Gamma)$.

À l'opposé, un sous-ensemble d'arêtes $R \subset E$ est un **arête-recouvrement** (ou encore un **ensemble arête-recouvrant**) si tout sommet de Γ est incident à l'une des arêtes de R : $V \subset \varepsilon(R)$.

Remarque 8.1.2. Cette notion n'a de sens que si Γ est **sans sommet isolé**.

L'ensemble $R \subset E$ est un **arête-recouvrement minimum** si pour tout arête-recouvrement R' on a : $|R| \leq |R'|$; le cardinal d'un arête-recouvrement minimum est noté $\beta'(\Gamma)$.

Remarque 8.1.3. Il est clair que si Γ_s est le simplifié de Γ , on a

$$\begin{aligned}\alpha(\Gamma_s) &= \alpha(\Gamma), & \beta(\Gamma_s) &= \beta(\Gamma), \\ \alpha'(\Gamma_s) &= \alpha'(\Gamma), & \beta'(\Gamma_s) &= \beta'(\Gamma).\end{aligned}$$

C'est pourquoi dans la suite les graphes seront supposés **simples**.

Un couplage qui est également un ensemble arête-recouvrant est appelé **couplage parfait**.

La figure 8.1 illustre les différentes notions introduites ci-dessus.

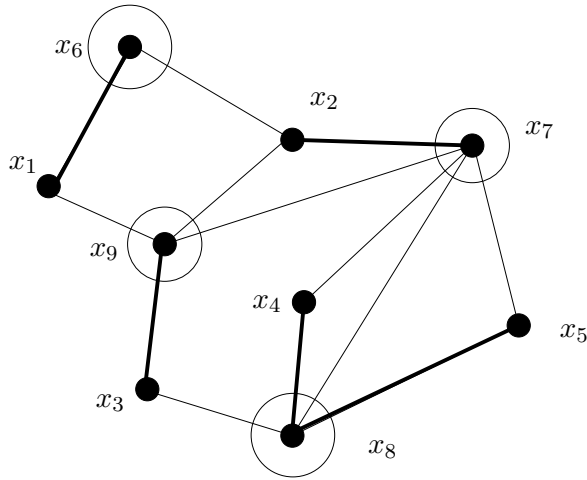


Figure 8.1 – Stabilité, transversalité, couplage et recouvrement dans un graphe. L'ensemble $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ est un stable maximum : $\alpha(\Gamma) = 5$. Les sommets encerclés forment un transversal minimum : $\beta(\Gamma) = 4$. Les arêtes $\{x_1, x_9\}, \{x_2, x_6\}, \{x_3, x_8\}, \{x_5, x_7\}$ forment un couplage maximum : $\alpha'(\Gamma) = 4$. Les arêtes en gras forment un arête-recouvrement minimum : $\beta'(\Gamma) = 5$.

Résumé et notations :

stable (sommets non adjacents) S , $\max = \alpha$;
 couplage (arêtes non incidentes) C , $\max = \alpha'$;
 transversal (toute arête est incidente) T , $\min = \beta$;
 arête-recouvrement (tout sommet est incident) R , $\min = \beta'$.

Comme nous allons le voir, il existe des relations entre les nombres $\alpha(\Gamma)$, $\alpha'(\Gamma)$, $\beta(\Gamma)$ et $\beta'(\Gamma)$; ce sont les relations de GALLAI.

Théorème 8.1.4 (GALLAI, 1959). *Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe simple. Alors on a :*

$$\alpha(\Gamma) + \beta(\Gamma) = |V|. \quad (8.1)$$

Si de plus Γ est sans sommet isolé :

$$\alpha'(\Gamma) + \beta'(\Gamma) = |V|. \quad (8.2)$$

Démonstration. Soit $S \subset V$; alors S stable $\iff V \setminus S$ transversal :

- si S est stable, toute arête a est incidente à $V \setminus S$, puisque sinon on aurait $\varepsilon(a) \subset S$;

- si $V \setminus S$ est transversal, alors pour tous $x, y \in S$, x et y ne sont pas adjacents, car sinon l'arête $e = (\{x, y\}, n)$ ne serait pas incidente à $V \setminus S$.

Maintenant en considérant un stable S de cardinal maximum, la relation (8.1) s'en déduit.

Montrons (8.2) :

- soit C un couplage de cardinal maximum $\alpha'(\Gamma)$ et notons comme d'habitude $\varepsilon(C)$ pour l'ensemble des extrémités des arêtes de C ; alors $S = V \setminus \varepsilon(C)$ est un stable. En effet, si une arête a avait ses deux extrémités dans S , $C \cup \{a\}$ serait un couplage ; choisissons pour chaque sommet de S une arête incidente (ce qui est possible car le graphe n'a pas de sommet isolé) ; ces arêtes sont donc bien distinctes et forment un ensemble $A : |A| = |S|$; le sous-ensemble $C \cup A$ de E est un ensemble arête-recouvrant de cardinal $|C| + |S| = |C| + |V| - |\varepsilon(C)| = |C| + |V| - 2|C| = |V| - |C| = |V| - \alpha'(\Gamma)$. On a donc $\beta'(\Gamma) \leq |V| - \alpha'(\Gamma)$;
- soit R un ensemble arête-recouvrant de cardinal $\beta'(\Gamma)$; notons $\Gamma(R)$ le graphe partiel déterminé par les arêtes de R (c'est bien un graphe partiel car Γ est sans sommet isolé) ; pour tout $a \in R$, $R \setminus \{a\}$ n'est plus un ensemble arête-recouvrant ; cela entraîne que chaque arête de R a l'une de ses extrémités qui est de degré 1 dans le graphe partiel $\Gamma(R)$; donc les composantes connexes de $\Gamma(R)$ sont des étoiles K_{1,t_i} , $i = 1, \dots, l$; pour une étoile $K_{1,t}$, on a la relation $|V(K_{1,t})| = |E(K_{1,t})| + 1$ entre le nombre de ses sommets et celui de ses arêtes ; prenons une arête e_i par composante connexe K_{1,t_i} , $1 \leq i \leq l$, de $\Gamma(R)$: on obtient un couplage $C = \{e_1, \dots, e_l\}$ et :

$$|V| = \sum_{i=1}^l |V(K_{1,t_i})| = l + \sum_{i=1}^l |E(K_{1,t_i})| = |C| + |R| = |C| + \beta'(\Gamma) ;$$

comme $|C| \leq \alpha'(\Gamma)$ on obtient finalement : $|V| \leq \alpha'(\Gamma) + \beta'(\Gamma)$, d'où le résultat. $\square$

Exercice 8.1.

- i) Démontrer qu'en général, si Γ est sans sommet isolé

$$\alpha'(\Gamma) \leq \frac{|V|}{2} \leq \beta'(\Gamma).$$

ii) Montrer que Γ admet un couplage parfait si et seulement si

$$\alpha'(\Gamma) = \frac{|V|}{2} = \beta'(\Gamma).$$

On constate au passage que $|V|$ est pair lorsque Γ admet un couplage parfait.

Une **chaîne alternée** relativement à un couplage C est une chaîne :

$$(x_1, a_1, x_2, a_2, \dots, x_{n-1}, a_{n-1}, x_n)$$

vérifiant :

- $x_1 \in V \setminus \varepsilon(C)$;
- $a_1, a_3, \dots, a_{2k-1}, \dots \notin C$;
- $a_2, a_4, \dots, a_{2k}, \dots \in C$.

Quand les graphes sont bipartis, nous avons le résultat suivant qui complète le théorème 8.1.4 de GALLAI.

Théorème 8.1.5 (KÖNIG, 1931). *Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe simple et biparti. Alors*

$$\alpha'(\Gamma) = \beta(\Gamma). \quad (8.3)$$

Si de plus Γ est sans sommet isolé :

$$\alpha(\Gamma) = \beta'(\Gamma). \quad (8.4)$$

Démonstration. On peut supposer Γ connexe. D'après le théorème 8.1.4 de GALLAI, il suffit de montrer (8.3). On écrit le graphe biparti Γ sous la forme $\Gamma = (V_1 \sqcup V_2; E)$ et soit C un couplage maximum : $|C| = \alpha'(\Gamma)$. Si $|E| = 1$ c'est fini, sinon on définit $T \subset V_1 \sqcup V_2$ de la manière suivante : pour chaque $a \in C$, $a = \{v_1, v_2\}$, $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, on met v_2 ou bien v_1 dans T selon qu'il existe ou non une chaîne alternée $(x_1, a_1, x_2, a_2, \dots, x_{n-1}, a_{n-1}, x_n)$ qui finit en $x_n = v_2$. Ainsi par construction $|T| = |C| = \alpha'(\Gamma)$.

Démontrons que **T est un transversal**, à savoir que toute arête est incidente à T : soit $a = \{w_1, w_2\}$, $w_1 \in V_1$, $w_2 \in V_2$, une arête :

- 1) si $a \in C$, alors a est incidente à T car par construction w_1 ou w_2 est dans T ;
- 2) si $a \notin C$, on distingue deux cas :
 - a) ou bien $w_1 \notin \varepsilon(C)$: alors (w_1, a, w_2) est une chaîne alternée, donc $w_2 \in T$,

b) **ou bien** $w_1 \in \varepsilon(C)$; alors il existe $a' = \{w_1, v_2\} \in C$:

- si $w_1 \in T$, on a fini,
- sinon $w_1 \notin T$, alors par construction $v_2 \in T$: il existe une chaîne alternée $(x_1, a_1, x_2, a_2, x_3, a_3, x_4, \dots, x_{2n-1}, a_{2n-1}, v_2)$; d'où l'autre chaîne alternée $(x_1, a_1, x_2, a_2, x_3, a_3, x_4, \dots, x_{2n-1}, a_{2n-1}, v_2, a', w_1, a, w_2)$.

Supposons par l'absurde que $w_2 \notin T$; considérons $C' = (C \setminus \{a_2, a_4, \dots, a_{2n-2}, a'\}) \cup \{a_1, \dots, a_{2n-1}, a\}$; alors $|C'| = |C| + 1$; montrons que C' est un couplage :

quand on passe de C à C' , les extrémités des arêtes ôtées sont $x_2, x_3, \dots, x_{2n-1}, v_2, w_1$ et celles de arêtes ajoutées sont $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2n-1}, v_2, w_1, w_2$; comme $x_1 \notin \varepsilon(C)$ et $a = \{w_1, w_2\} \notin C$ avec $w_1 \in \varepsilon(C)$ on a $w_2 \notin \varepsilon(C)$; ainsi C' est un couplage de cardinal supérieur à celui de C , contradiction ; donc $w_2 \in T$.

T est un transversal minimum, car un transversal quelconque U doit être incident à toutes les arêtes du couplage C donc doit contenir au moins $|C|$ sommets ($\alpha'(\Gamma) \leq \beta(\Gamma)$) ; ainsi $|T| = \beta(\Gamma)$ et $\alpha'(\Gamma) = \beta(\Gamma)$. $\square$

Remarque 8.1.6. la preuve ci-dessus donne une méthode pour fabriquer un couplage maximum à partir d'un couplage quelconque C : s'il existe une chaîne alternée

$$(x_1, a_1, x_2, a_2, \dots, a_{2n-1}, x_{2n})$$

finissant en $x_{2n} \in V_2 \setminus \varepsilon(C)$ (c'est une **chaîne « augmentante »**) alors

$$C' = (C \setminus \{a_2, a_4, \dots, a_{2i}, \dots, a_{2n-2}\}) \cup \{a_1, a_3, \dots, a_{2i+1}, \dots, a_{2n-1}\}$$

est un couplage vérifiant $|C'| = |C| + 1$.

Exercice 8.2. Soit $\Gamma = (V_1 \sqcup V_2; E)$ un graphe biparti. Montrer que $\alpha'(\Gamma) = \beta(\Gamma)$ de la façon suivante : on ajoute au graphe un sommet s adjacent à tous les sommets de V_1 et un sommet p adjacent à tous les sommets de V_2 . Ainsi on obtient un nouveau graphe noté Γ' contenant Γ .

- i) Démontrer qu'à chaque arête de Γ il correspond une chaîne élémentaire de s à p et réciproquement.
- ii) Montrer qu'il y a autant d'arêtes dans un couplage maximum de Γ que dans un ensemble maximum de chaînes élémentaires sommet-disjointes de s à p dans Γ' .

- iii) Établir ensuite qu'un transversal minimum de Γ est un ensemble sommet-séparant minimum de Γ' .
- iv) Conclure avec le théorème 4.5.3 de MENGER.

Exercice 8.3. Le graphe représenté en figure 8.1 est-il biparti ?

Proposition 8.1.7. Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe simple sans sommet isolé. Alors

$$\frac{|V|}{1 + \Delta(\Gamma)} \leq \alpha'(\Gamma) \leq \frac{|V|}{2}. \quad (8.5)$$

De plus ces bornes sont les meilleures possibles.

Démonstration. Sans perdre de généralité on peut supposer que le graphe est connexe (sinon on traite les composantes connexes une à une).

La majoration de $\alpha'(\Gamma)$ a été énoncée à l'exercice 8.1 ; la borne est atteinte lorsque le graphe admet un couplage parfait.

Pour la minoration de $\alpha'(\Gamma)$ nous allons raisonner par récurrence sur le nombre d'arêtes $m = |E|$. Si $m = 1$, alors $|V| = 2$, $\Delta(\Gamma) = 1$ et $\alpha'(\Gamma) = 1$; si $m = 2$, alors $|V| = 3$ et $\Delta(\Gamma) = 2$ et $\alpha'(\Gamma) = 1$: ainsi on a $\frac{|V|}{1 + \Delta(\Gamma)} = 1$, qui est bien inférieur ou égal à $\alpha'(\Gamma) = 1$.

Supposons que l'assertion soit vraie pour $m \geq 2$ et soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe ayant $m + 1$ arêtes. Nous distinguons deux cas :

- i) si Γ possède un cycle, soit a une arête sur ce cycle ; alors $\Gamma \setminus a$ est connexe et

$$\alpha'(\Gamma) \geq \alpha'(\Gamma \setminus a) \geq \frac{|V|}{1 + \Delta(\Gamma \setminus a)} \geq \frac{|V|}{1 + \Delta(\Gamma)} ;$$

- ii) si Γ ne possède pas de cycle, alors Γ est un arbre :

- si $\Gamma = K_{1, |V|-1}$ est une étoile, alors $\Delta(\Gamma) = |V| - 1$ et $\alpha'(\Gamma) = 1 = \frac{|V|}{1 + \Delta(\Gamma)}$; dans ce cas la borne est atteinte,
- si Γ n'est pas une étoile, il contient une arête a telle que $\Gamma \setminus a$ admette deux composantes connexes Γ_1 et Γ_2 qui ne soient pas réduites à des sommets isolés. Alors par l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} \alpha'(\Gamma) &= \alpha'(\Gamma_1) + \alpha'(\Gamma_2) \\ &\geq \frac{|V_1|}{1 + \Delta(\Gamma_1)} + \frac{|V_2|}{1 + \Delta(\Gamma_2)} \\ &\geq \frac{|V_1|}{1 + \Delta(\Gamma)} + \frac{|V_2|}{1 + \Delta(\Gamma)} = \frac{|V|}{1 + \Delta(\Gamma)}. \quad \square \end{aligned}$$

Exercice 8.4. Démontrer le corollaire suivant.

Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe sans sommet isolé. Alors :

$$\frac{|V|}{2} \leq \beta'(\Gamma) \leq \frac{|V| \cdot \Delta(\Gamma)}{1 + \Delta(\Gamma)}. \quad (8.6)$$

De plus ces bornes sont les meilleures possibles.

Indication : on utilisera le théorème 8.1.5 de KÖNIG et la proposition 8.1.7.

8.2 Couplages dans les graphes bipartis

8.2.1 Le théorème de HALL

Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe simple. Rappelons (voir § 1.1.1) que $\Gamma(x) = \{y \in V \setminus \{x\} : y \text{ adjacent à } x\}$ est l'ensemble de tous les voisins de x et que plus généralement le **voisinage d'un sous-ensemble de sommets** X est défini par :

$$\Gamma(X) = \{y \in V \setminus X : y \text{ adjacent à au moins un sommet } x \in X\}.$$

Le théorème de HALL, aussi appelé **théorème des mariages**, donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe biparti admette un couplage parfait. Il y a plusieurs preuves de ce théorème nous en aborderons trois. La première utilise le théorème 8.1.5 de KÖNIG, la deuxième est algorithmique et la troisième utilise le théorème de MENGER (voir théorème 4.5.3). Le théorème de HALL ci-dessous résout plus généralement le mariage des filles évoqué au début du chapitre; il est lié à la notion suivante : soit $X \subset V$; on dit que $C \subset E$ est un **couplage** de X si :

- i) les arêtes de C ne sont pas incidentes deux à deux (*i.e.* C est un couplage),
- ii) tout sommet de X est incident à une arête de C .

Si $X = V$, un couplage de V est simplement un couplage parfait de Γ .

Théorème 8.2.1 (HALL, 1935). *Soit $\Gamma = (V_1 \sqcup V_2; E)$ un graphe biparti sans sommet isolé. Alors :*

- i) Γ admet un couplage de V_1 si et seulement si

$$\forall X \subset V_1 : |\Gamma(X)| \geq |X|. \quad (8.7)$$

- ii) Γ admet un couplage parfait (*i.e.* un couplage de V) si et seulement si :

$$\forall X \subset V \text{ tel que } X \subset V_1 \text{ ou } X \subset V_2 : |\Gamma(X)| \geq |X|. \quad (8.8)$$

Démonstration. Le ii) est une conséquence du i) : si Γ admet un couplage parfait C , alors ce même couplage est évidemment un couplage de V_1 et de V_2 . Par (8.7) appliqué à V_1 et V_2 , on obtient (8.8).

Réciproquement, supposons que Γ vérifie (8.8) : alors Γ admet un couplage C_1 de V_1 et un couplage C_2 de V_2 . On a conjointement $|V_1| = |C_1| \leq |V_2|$ et $|V_2| = |C_2| \leq |V_1|$. Donc $|C_1| = |V_2|$ et tout sommet de V_2 est incident à C_1 : C_1 est un couplage parfait de Γ .

Preuve de i) : la condition (8.7) est clairement nécessaire : soit C un couplage de V_1 et X un sous-ensemble de V_1 ; notons $E(X)$ l'ensemble des arêtes de C qui sont incidentes à un sommet de X ; les extrémités des arêtes de $E(X)$ qui sont dans V_2 forment un sous-ensemble de $\Gamma(X)$, qui est de cardinal $|X|$ (car les arêtes de C ne sont pas incidentes), donc $|\Gamma(X)| \geq |X|$.

La condition (8.7) est suffisante. Nous proposons trois preuves.

Première preuve

Soit $X = X_1 \sqcup X_2$ un transversal minimum de Γ avec $X_1 \subset V_1$ et $X_2 \subset V_2$; d'après le théorème 8.1.5 de KÖNIG, $|X|$ est le cardinal d'un couplage maximum C ; si C n'est pas un couplage de V_1 , c'est que $|C| < |V_1|$, donc $|X| = |X_1| + |X_2| = |C| < |V_1|$ et $|X_2| < |V_1| - |X_1| = |V_1 \setminus X_1|$; comme $|X|$ est un transversal, toute arête est incidente à X_1 ou à X_2 , donc il n'y a aucune arête entre $V_1 \setminus X_1$ et $V_2 \setminus X_2$; de ce fait toute arête incidente à $V_1 \setminus X_1$ est incidente à V_2 : $\Gamma(V_1 \setminus X_1) \leq |X_2| < |V_1 \setminus X_1|$ et (8.7) n'est pas réalisée.

Deuxième preuve

Supposons que la condition (8.7) soit vérifiée. Soit $\vec{\Gamma}_{s,p}$ le réseau associé à Γ (voir § 8.2.2, exercice 8.2). Soit C un ensemble sommet-séparant (voir § 4.5) ; alors $\Gamma(V_1 \setminus C) \subseteq V_2 \cap C$. On a $|C| = |V_1 \cap C| + |V_2 \cap C|$, donc $|C| \geq |V_1 \cap C| + |\Gamma(V_1 \setminus C)|$. D'après la condition (8.7), $|\Gamma(V_1 \setminus C)| \geq |V_1 \setminus C|$. Ainsi $|C| \geq |V_1 \cap C| + |V_1 \setminus C| = |V_1|$, mais alors d'après le théorème 4.5.3 de MENGER, il y a $|V_1|$ chemins élémentaires sommet-disjoints de s à p ce qui nous donne un couplage de cardinal $|V_1|$.

Troisième preuve

Soit $x_0 \in V_1 \setminus \varepsilon(C)$.

On construit par récurrence deux suites $x_0, x_1, \dots, x_t$ et $y_1, \dots, y_t$ vérifiant pour tout i , $1 \leq i \leq t$:

- a) $\exists f(i) : 0 \leq f(i) \leq i-1$, tel que $e_i = \{y_i, x_{f(i)}\} \in E \setminus C$.
- b) $a_i = \{y_i, x_i\} \in C$.

$t = 1$: comme $|\Gamma(x_0)| \geq |\{x_0\}| = 1$, il existe $y_1 \in V_2$ adjacent à x_0 :

- si $y_1 \notin \varepsilon(C)$, $C' = C \cup \{y_1, x_0\}$ convient : on s'arrête ;
- sinon $y_1 \in \varepsilon(C)$: il existe $a_1 = \{y_1, x_1\} \in C$, d'où b) ; et $\{y_1, x_0\} \in E \setminus C$ car $x_0 \notin \varepsilon(C)$, d'où a) avec $f(1) = 0$.

$t \curvearrowright t + 1$: comme $|\Gamma(x_0, \dots, x_t)| \geq |\{x_0, \dots, x_t\}| = t + 1$, il existe $y_{t+1} \in V_2$ distincts de $y_1, \dots, y_t$ et adjacent à $x_{f(t+1)}$ où $0 \leq f(t+1) \leq t$:

- si $y_{t+1} \notin \varepsilon(C)$, on s'arrête ;
- sinon $y_{t+1} \in \varepsilon(C)$: il existe $a_{t+1} = \{y_{t+1}, x_{t+1}\} \in C$, d'où b) ; et $\{y_{t+1}, x_{f(t+1)}\} \in E \setminus C$ car C est un couplage et $\{y_{t+1}, x_{t+1}\} \in C$.

Le procédé s'arrête par épuisement des y_t : supposons donc l'arrêt à l'étape t , avec $y_t \notin \varepsilon(C)$, il existe $r > 0$ tel que $f^r(t) = 0$; alors

$$P = (y_t, e_t, x_{f(t)}, a_{f(t)}, y_{f(t)}, e_{f(t)}, x_{f^2(t)}, \dots, x_{f^r(t)} = x_0)$$

est une chaîne augmentante au sens de la remarque suivant le théorème 8.1.5 de KÖNIG ; on enlève à C les $r - 1$ arêtes $a_{f^k(t)}$, $1 \leq k \leq r - 1$, et on les remplace par les r arêtes $e_{f^k(t)}$, $0 \leq k \leq r - 1$; cela donne un couplage C' vérifiant $|C'| = |C| + 1$.

Cette démonstration un peu technique a l'avantage d'être effective. $\square$

Remarque 8.2.2. Ainsi une condition nécessaire et suffisante pour marier toutes les filles, dans le problème des mariages, est que chaque groupe de « copines » connaisse au moins autant de garçons.

On pourra aussi noter que si $\Gamma = (V_1 \sqcup V_2; E)$ biparti admet un couplage parfait alors $|V_1| = |V_2|$, puisqu'un couplage parfait est également un ensemble arête-recouvrant.

Corollaire 8.2.3. Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe biparti régulier de degré $k \geq 1$. Alors Γ admet un couplage parfait.

Démonstration. D'après le théorème 8.2.1 de HALL, il est suffisant de démontrer que (8.8) est vérifiée. Soit X un sous-ensemble de V_2 de cardinal t . Il existe kt arêtes incidentes à X . Comme chaque sommet de V_1 est incident à k arêtes alors les kt arêtes incidentes à X doivent être incidentes à au moins t sommets de V_1 . D'où $|\Gamma(X)| \geq |X|$. On raisonne de la même manière pour un sous-ensemble X de V_1 . $\square$

8.2.2 Réseau associé à un graphe biparti

Soit $\Gamma = (V_1 \sqcup V_2; E)$ un graphe biparti et associons à ce graphe biparti le réseau défini de la manière suivante :

- on ajoute à Γ deux sommets s, p ;
- le sommet s est adjacent à tous les sommets de V_1 ;

- le sommet p est adjacent à tous les sommets de V_2 ;
- on oriente les arêtes :
les arêtes du type $a = \{s, x\}$, $x \in V_1$, deviennent des arcs du type $\vec{a} = (s, x)$ et les arêtes du type $a = \{y, p\}$, $y \in V_2$, deviennent des arcs du type $\vec{a} = (y, p)$; celles entre V_1 et V_2 sont orientées de V_1 à V_2 : $a \curvearrowright \vec{a}$;
- la capacité de chaque arc $\vec{a}$ est fixé à $c(\vec{a}) = 1$.

On obtient ainsi un réseau noté $\vec{\Gamma}_{s,p}$ appelé **réseau associé au graphe biparti Γ** .

Proposition 8.2.4. *Soit $\Gamma = (V_1 \sqcup V_2; E)$ un graphe biparti et $\vec{\Gamma}_{s,p}$ « son » réseau associé. À tout flot f de $\vec{\Gamma}_{s,p}$ à valeur dans $\mathbb{N}$, il correspond un couplage et réciproquement.*

Démonstration. Soit f un flot à valeur entière dans $\vec{\Gamma}_{s,p}$. D'après les caractéristiques de la capacité, on a $f(\vec{a}) = 0$ ou 1 pour chaque $\vec{a}$ de $\vec{\Gamma}_{s,p}$. Soit C l'ensemble des arêtes de Γ correspondant aux arcs de $\vec{\Gamma}_{s,p}$ ayant un flot égal à un ; de la structure de $\vec{\Gamma}_{s,p}$ et de la loi de conservation du flot (voir § 4.4), on constate que C correspond bien à un couplage.

Réciproquement, soit C un couplage dans Γ . Pour chaque arc $\vec{a}$ de $\vec{\Gamma}_{s,p}$ posons

$$f(\vec{a}) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \text{ est une arête de } C. \\ 1 & \text{si } \vec{a} \text{ est un arc du type } (s, x) \text{ ou } (x, p) \\ & \text{incident à un arc de } C. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (8.9)$$

Par construction f vérifie la condition de contrainte de capacité et de conservation du flot. $\square$

Exercice 8.5. Montrer qu'un flot défini comme en (8.9) est maximum si et seulement si le couplage qui lui correspond est maximum.

8.2.3 Remarques algorithmiques

Pour obtenir un algorithme qui construit un couplage maximum dans un graphe biparti, on peut utiliser l'algorithme de FORD et FULKERSON donnant la valeur maximum d'un flot sur un réseau. On construit un réseau comme indiqué au § 8.2.2. On calcule, grâce à l'algorithme de FORD et FULKERSON (voir § 4.4.2), un flot maximum entre s et p , de cardinal k . D'après la proposition 8.2.4, les conclusions de l'exercice 8.5 et

en appliquant la loi de conservation du flot, cela nous donne un couplage maximum en prenant toutes les arêtes a de Γ telles que pour les arcs correspondants $\vec{a}$ dans $\vec{\Gamma}_{s,p}$, on ait $f(\vec{a}) = 1$.

8.3 Couplages dans les graphes quelconques

Nous allons maintenant voir un résultat général dû à W.T. TUTTE. **Notations** : soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe simple. On notera $q(\Gamma)$ le nombre de composantes connexes dont le cardinal est impair ; une telle composante est appelée simplement « composante impaire » ; si $X \subset V$ on notera $\Gamma \setminus X$ le sous-graphe induit $\Gamma(V \setminus X)$, de sorte que $q(\Gamma \setminus X)$ désigne le nombre de composantes impaires du sous-graphe induit sur $V \setminus X$.

Un des intérêts de l'invariant $q(\Gamma)$ d'un graphe Γ réside dans le lemme facile suivant.

Lemme 8.3.1. $q(\Gamma) \equiv |V| \pmod{2}$.

Démonstration. Le nombre total de sommets dans les composantes connexes de cardinal pair est pair, on le note $2k$. On note C_i , $i = 1, \dots, q(\Gamma)$, les composantes connexes de cardinal impair. On a donc

$$|V| - 2k = \sum_{i=1}^{q(\Gamma)} |C_i| = q(\Gamma) + \sum_{i=1}^{q(\Gamma)} (|C_i| - 1)$$

d'où $|V| \equiv q(\Gamma) \pmod{2}$. □

On peut remarquer que si Γ admet un couplage parfait C , alors on a la **propriété de TUTTE** :

$$q(\Gamma \setminus X) \leq |X|, \text{ pour tout } X \subset V. \quad (8.10)$$

En effet si M est une composante impaire de $\Gamma \setminus X$, M contient des arêtes de C , mais comme $|M|$ est impair, l'une d'elles « sort » de M en un sommet de $V \setminus M$ donc de X car C est un couplage. D'où (8.10).

La figure 8.2 illustre ce fait.

Remarque 8.3.2. On notera que si (8.10) est vérifiée, Γ est sans sommet isolé : pour $X = \emptyset$, (8.10) donne $q(\Gamma) = 0$.

Il est remarquable que cette condition, somme toute assez simple, soit également suffisante.

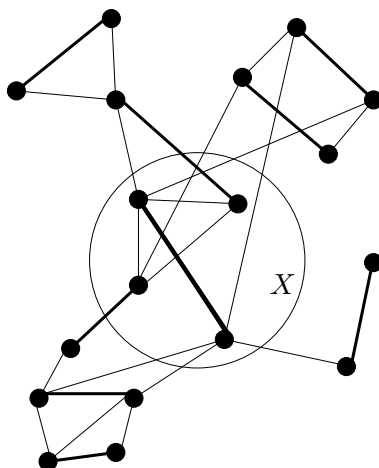


Figure 8.2 – Propriété de TUTTE. Le couplage parfait est constitué des arêtes en gras. X est constitué des 4 sommets encerclés. $\Gamma \setminus X$ admet 4 composantes connexes : deux paires et deux impaires ; $q(\Gamma \setminus X) = 2 < 4 = |X|$.

Théorème 8.3.3 (TUTTE, 1947). *Un graphe $\Gamma = (V; E)$ admet un couplage parfait si et seulement s'il vérifie la condition de TUTTE (8.10) :*

$$q(\Gamma \setminus X) \leq |X| \text{ pour tout } X \subset V.$$

Démonstration. La preuve de la suffisance de la condition (8.10) de TUTTE n'est pas aussi simple que celle de la nécessité ! Observons tout d'abord ce qu'il se passe lorsque Γ admet un couplage parfait C : supposons qu'il existe $X_0 \neq \emptyset$ pour lequel on a l'égalité dans (8.10) : $q(\Gamma \setminus X_0) = |X_0|$; écrivons la décomposition connexe de $\Gamma \setminus X_0$:

$$V(\Gamma \setminus X_0) = \bigsqcup_{1 \leq i \leq m} M_i \sqcup \bigsqcup_{1 \leq j \leq p} P_j$$

où $m = |X_0|$ est le nombre de composantes impaires M_i et p le nombre de composantes paires P_j . Comme nous l'avons déjà observé, il existe pour chaque M_i une arête $\{m_i, x_i\} \in C$, $x_i \in X_0$, $m_i \in M_i$; mais comme $m = |X_0|$ on voit qu'il existe exactement une telle arête. Chaque $M_i \setminus m_i$, chaque P_j contient un couplage parfait (ce sont des sous-graphes de C). Finalement les arêtes $\{m_i, x_i\}$, $1 \leq i \leq m$, forment un couplage entre X_0 et l'ensemble $\{M_1, \dots, M_m\}$.

La preuve est basée sur le fait qu'on peut trouver un tel X_0 . On raisonne

par récurrence sur le nombre de sommets de Γ ; il n'y a rien à prouver si $|V(\Gamma)| = 0$. Si $|V(\Gamma)| = 1$, d'après la remarque 8.3.2, Γ ne satisfait pas la condition (8.10) de TUTTE : l'implication est trivialement vérifiée.

Supposons le résultat établi pour les graphes d'ordre $< n$, $n \geq 1$, et soit Γ d'ordre n satisfaisant (8.10). Remarquons que (8.10) appliquée à $X = \emptyset$ impose que $|V|$ est pair ; soit x un sommet de Γ : $\Gamma - x$, ayant un nombre impair de sommets, admet au moins une composante impaire ; mais (8.10) appliquée à $X = \{x\}$ montre qu'en fait $\Gamma - x$ possède exactement une composante impaire et ainsi pour $X = \{x\}$ on a $q(\Gamma \setminus X) = |X|$; on peut donc affirmer :

$$\text{il existe un } X_0 \subset V \text{ maximal tel que } q(\Gamma \setminus X_0) = |X_0|. \quad (8.11)$$

Écrivons comme ci-dessus la décomposition connexe de $\Gamma \setminus X_0$:

$$V(\Gamma \setminus X_0) = \bigsqcup_{1 \leq i \leq m} M_i \sqcup \bigsqcup_{1 \leq j \leq p} P_j \quad (8.12)$$

où $m = |X_0|$ est le nombre de composantes impaires M_i et p le nombre de composantes paires P_j de $\Gamma \setminus X_0$. On procède en plusieurs points.

a) Chaque P_j admet un couplage parfait.

Soit $X \subset P_j$; d'après (8.12) on a :

$$V(\Gamma \setminus (X_0 \sqcup X)) = \bigsqcup_{1 \leq i \leq m} M_i \sqcup (P_j \setminus X) \sqcup \bigsqcup_{1 \leq k \leq p, k \neq j} P_k$$

où l'on voit que les composantes impaires de $\Gamma \setminus (X_0 \sqcup X)$ sont les M_i et les composantes impaires de $P_j \setminus X$. Ainsi :

$$q(\Gamma \setminus X_0 \sqcup X) = q(\Gamma \setminus X_0) + q(P_j \setminus X) ;$$

mais d'après (8.10) : $q(\Gamma \setminus (X_0 \sqcup X)) \leq |X_0 \sqcup X| = |X_0| + |X|$ et comme $q(\Gamma \setminus X_0) = |X_0|$ on en déduit :

$$q(P_j \setminus X) \leq |X| ;$$

P_j vérifie ainsi la condition de TUTTE donc, d'après l'hypothèse de récurrence, admet un couplage parfait.

b) Pour $x \in M_i$ (M_i composante impaire), $M_i \setminus \{x\}$ admet un couplage parfait.

Supposons que ce soit faux. Alors d'après l'hypothèse de récurrence il existe $X \subset V(M_i \setminus \{x\})$ tel que

$$q(M_i \setminus (\{x\} \sqcup X)) > |X|,$$

mais, d'après le lemme 8.3.1, $q(M_i \setminus (\{x\} \sqcup X)) \equiv |M_i| - 1 - |X| \equiv |X| \pmod{2}$; il s'ensuit que

$$q(M_i \setminus \{x\} \sqcup X) \geq |X| + 2; \quad (8.13)$$

par ailleurs $\{x\} \sqcup X \subset M_i$; retirons cet ensemble aux deux membres de (8.12) :

$$V(\Gamma \setminus (X_0 \sqcup \{x\} \sqcup X)) = (M_i \setminus (\{x\} \sqcup X)) \sqcup \bigsqcup_{i' \neq i} M_{i'} \sqcup \bigsqcup_j P_j$$

d'où :

$$\begin{aligned} q(\Gamma \setminus (X_0 \sqcup \{x\} \sqcup X)) &= q(M_i \setminus (\{x\} \sqcup X)) + q(\Gamma \setminus X_0) - 1 \\ &\geq |X| + 2 + q(\Gamma \setminus X_0) - 1 = |X| + 1 + |X_0| \end{aligned}$$

d'après (8.11) et (8.13); d'où l'égalité dans la condition (8.10) de TUTTE, ce qui contredit la maximalité de X_0 .

- c) Γ contient m arêtes disjointes de la forme $\{m_i, x_i\}$, $m_i \in M_i$, $x_i \in X_0$, $1 \leq i \leq m$.

Pour voir cela, considérons le graphe biparti $\Delta = (V_1 \sqcup V_2; E)$ où

– $V_1 = \{M_1, \dots, M_m\}$,

– $V_2 = X_0$,

– on joint M_i à $x \in X_0$ si Γ contient une arête entre x et M_i .

Δ admet un couplage de V_1 : soit $Y \subset V_1$, on pose $Z = \Gamma_\Delta(Y)$; alors $Z \subset V_2$ et par (8.10) $q(\Gamma \setminus Z) \leq |Z|$; les éléments de Y restent par construction des composantes impaires de $\Gamma \setminus Z$, donc $|Y| \leq q(\Gamma \setminus Z) \leq |Z| = |\Gamma_\Delta(Y)|$; le théorème 8.2.1 de HALL s'applique : Δ admet bien un couplage de V_1 , ce qui montre le résultat voulu.

- d) Fabriquons maintenant un couplage de Γ :

– prenons les m arêtes disjointes $\{m_i, x_i\}$, $m_i \in M_i$, $x_i \in X_0$, $1 \leq i \leq m$, obtenues en c),

– ajoutons les arêtes des couplages parfaits des $M_i \setminus \{x_i\}$, $1 \leq i \leq m$ de l'étape b),

– prenons enfin les arêtes des p couplages parfaits des P_j , $1 \leq j \leq p$ de l'étape a);

c'est un couplage parfait de Γ , car chaque sommet de Γ est clairement incident à une arête de ce couplage.

La figure 8.3 montre la structure de la preuve. □

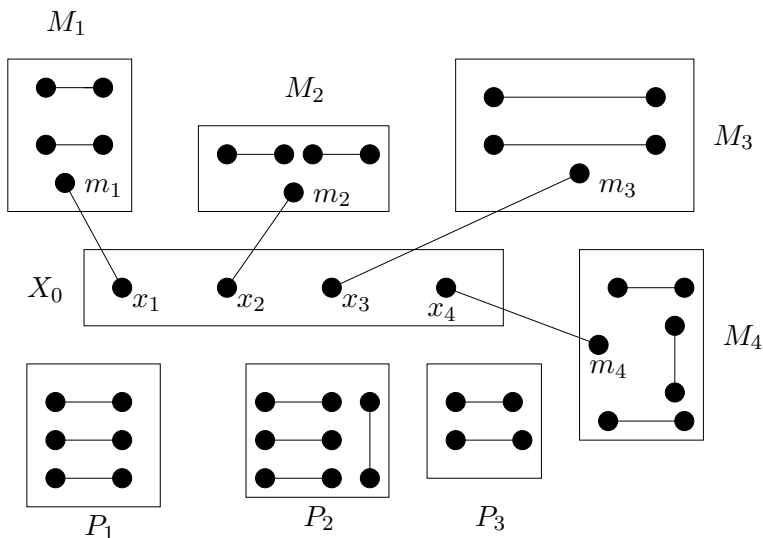


Figure 8.3 – Schéma de la preuve du théorème de TUTTE. Ici $\Gamma \setminus X_0$ a $|X_0| = 4$ composantes impaires M_i (couplage parfait de $M_i \setminus \{x\}$, étape b)) et 3 composantes paires P_j (couplages parfaits, étape a)) ; arêtes $\{x_i, m_i\}$ (étape c)).

Corollaire 8.3.4 (PETERSEN, 1891). *Tout graphe cubique sans isthme a un couplage parfait.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que la condition de TUTTE (8.10) est satisfaite pour un graphe cubique $\Gamma = (V; E)$. Soit $X \subset V$ et soit M une composante impaire de $\Gamma(V \setminus X)$. Puisque Γ est un graphe cubique, la somme des degrés (dans Γ) des sommets de M est un nombre impair. Mais la somme des degrés des sommets de M qui sont incidents aux arêtes contenues dans M est paire (voir exercice 1.1.9). D'où le nombre d'arêtes entre M et X est impair. Donc il y en a au moins trois puisque le graphe est sans isthme. Par conséquent le nombre total d'arêtes entre X et $V \setminus X$ est au moins égal à $3q(\Gamma \setminus X)$. Mais ce nombre est également au plus égal à $3|X|$, car Γ est cubique. D'où $q(\Gamma \setminus X) \leq |X|$. $\square$

Remarque 8.3.5. Ainsi un graphe cubique 2-arête-connexe admet un couplage parfait.

Exercice 8.6. Le graphe de PETERSEN (représenté en figure 8.4) est cubique sans isthme : trouver tous ses couplages parfaits.

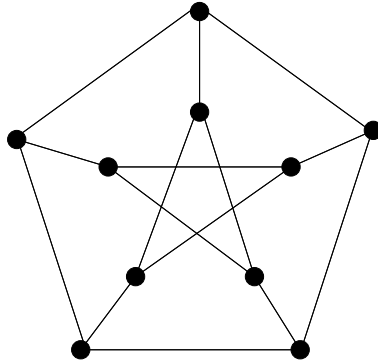


Figure 8.4 – Le graphe de PETERSEN.

Exercice 8.7.

- i) Trouver un graphe cubique avec isthme possédant un couplage parfait.
- ii) Montrer que le graphe représenté en figure 8.5 n'admet pas de couplage parfait. Peut-on généraliser cette construction ?

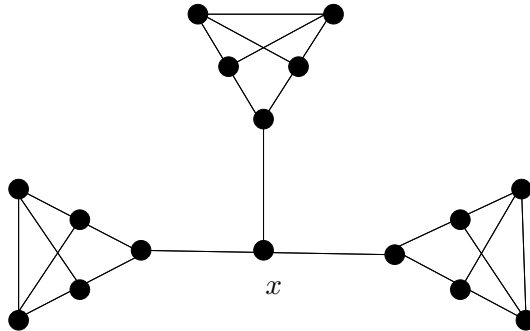


Figure 8.5 – Graphe sans couplage parfait.

Nous donnons une autre application du théorème 8.3.3 de TUTTE ; auparavant nous aurons besoin du résultat auxiliaire suivant que nous proposons en exercice.

Exercice 8.8.

- i) Démontrer, en raisonnant par l'absurde, qu'un graphe simple $\Gamma = (V; E)$ vérifiant $\delta(\Gamma) \geq \frac{|V|}{2}$ est nécessairement connexe.
- ii) Montrer sur un exemple que i) est faux pour un multigraphe.

L'existence d'un couplage parfait dans un graphe $\Gamma = (V; E)$ nécessite la parité de $|V|$, condition qui n'est généralement pas suffisante. Ci-dessous nous donnons une condition plus restrictive qui s'avère, elle, suffisante.

Théorème 8.3.6. *Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe simple ayant $|V| = 2n$ sommets et de degré minimum $\delta(\Gamma) \geq n$. Alors Γ possède un couplage parfait.*

Démonstration. En vertu du théorème 8.3.3 de TUTTE, il s'agit de vérifier la condition (8.10) de TUTTE :

$$q(\Gamma \setminus X) \leq |X| \quad \text{pour tout } X \subset V.$$

- a) Si $X = \emptyset$, on a $q(\Gamma \setminus X) = q(\Gamma) = 0$, car $|V|$ est pair et d'après les conclusions de l'exercice 8.8, le graphe Γ est connexe.
- b) Supposons donc que X satisfait $1 \leq |X| \leq 2n$; notons $V(\Gamma \setminus X) = \bigsqcup_{1 \leq i \leq k} C_i$ la décomposition en composantes connexes de $\Gamma \setminus X$; chaque $x \in C_i$ a au plus $|X|$ voisins dans X et par suite

$$n \leq \delta(\Gamma) \leq d_{\Gamma}(x) = d_{C_i}(x) + |\Gamma(x) \cap X| \leq d_{C_i}(x) + |X|;$$

il s'ensuit que $d_{C_i}(x) \geq n - |X|$, puis :

$$|C_i| \geq d_{C_i}(x) + 1 \geq n - |X| + 1.$$

- Si $|X| = 1$, alors

$$|V| = 2n = 1 + \sum_{1 \leq i \leq k} |C_i| \geq 1 + k(n - |X| + 1) = 1 + kn,$$

donc $k \leq \frac{2n-1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2$: $k \leq 1$; d'où $q(\Gamma \setminus X) \leq k \leq 1 = |X|$.

- Si $2 \leq |X| \leq n$, alors

$$|V| = 2n = |X| + \sum_{1 \leq i \leq k} |C_i| \geq |X| + k(n - |X| + 1),$$

donnant $k \leq \frac{2n-|X|}{n-|X|+1}$; or $\frac{2n-|X|}{n-|X|+1} \leq |X|$ équivaut à

$$|X|^2 - (n+2)|X| + 2n \leq 0.$$

Le polynôme $P(T) = T^2 - (n+2)T + 2n$ étant négatif entre ses racines 2 et n , on obtient $q(\Gamma \setminus X) \leq k \leq |X|$.

- Si $n+1 \leq |X| \leq 2n$, le nombre k de composantes connexes de $\Gamma \setminus X$ est inférieur ou égal à $|\Gamma \setminus X|$, et ce nombre satisfait $k \leq 2n - |X| \leq |X|$; a fortiori $q(\Gamma \setminus X) \leq k \leq |X|$. $\square$

Par exemple K_{2n} admet un couplage parfait (voir aussi la proposition 8.4.4 et une illustration de la factorisation de K_6 au § 8.4).

8.4 Factorisation

Un graphe partiel régulier de degré k d'un graphe Γ est appelé **facteur de degré k** ou simplement **k -facteur** ; un couplage parfait est simplement un 1-facteur.

S'il existe des k -facteurs arête-disjoints qui recouvrent toutes les arêtes : $E = \bigsqcup E_i$, où E_i est l'ensemble des arêtes d'un k -facteur, on dit qu'on a une **k -factorisation** de Γ .

Proposition 8.4.1. *Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe simple biparti. Alors*

- i) *Si Γ admet une 1-factorisation, il est régulier.*
- ii) *Réciproquement si Γ est régulier de degré k , il admet une 1-factorisation constituée de k facteurs de degré 1.*

Démonstration.

- i) Si Γ admet une 1-factorisation, il est régulier : on écrit $E = \bigsqcup_{1 \leq i \leq k} E_i$, où E_i est l'ensemble des arêtes d'un 1-facteur ; chaque sommet x est incident à exactement une arête de chaque E_i (les 1-facteurs sont des couplages parfaits), donc $d(x) = k$.
- ii) Si Γ est régulier de degré k , il admet au moins un couplage parfait (c'est-à-dire un 1-facteur) d'après le corollaire 8.2.3 du théorème 8.2.1 de HALL. On retire les arêtes de ce couplage ; le graphe partiel obtenu est biparti et $(k-1)$ -régulier ; on peut donc appliquer à nouveau le corollaire 8.2.3 ; et ainsi de suite jusqu'à obtenir finalement un graphe biparti régulier de degré 1, qui correspond à un 1-facteur. $\square$

Exercice 8.9. Donner un exemple de graphe régulier, ayant un nombre pair de sommets qui n'admette pas de 1-factorisation.

Théorème 8.4.2 (PETERSEN, 1891). *Un graphe simple régulier de degré $2k$ ($k \geq 1$) admet une 2-factorisation.*

Démonstration. Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe régulier de degré $2k$. Sans perdre de généralité on peut supposer que Γ est connexe. D'après le théorème d'EULER (voir théorème 2.4.2), le graphe admet un cycle eulérien C .

Orientons les arêtes de telle sorte que C devienne un circuit. Dans ce graphe orienté $\vec{\Gamma} = (V; \vec{E})$, pour tout sommet x on a $d^-(x) = d^+(x) = k$: il y a k arcs entrants et k arcs sortants. En partant de cette orientation on construit un graphe biparti $B = (V^+ \sqcup V^-; A)$ de la manière suivante :

- chaque sommet x est remplacé par une paire de sommets x^-, x^+ et $V^+ = \{x^+, x \in V\}$, $V^- = \{x^-, x \in V\}$;
- chaque arc $\vec{e} = (x, y) \in \vec{E}$ est remplacé par une arête $a = \{x^+, y^-\}$ de A .

Le graphe B est biparti par construction. De plus ce graphe est régulier de degré k . En appliquant la proposition 8.4.1, B admet une 1-factorisation avec $E = \bigsqcup E_i$; on obtient pour chaque i : pour tout sommet $x \in V$ il existe une unique arête $a \in E_i$ telle que $x^+ \in \varepsilon(a)$ et une unique arête $a' \in E_i$ telle que $x^- \in \varepsilon(a')$, $a' \neq a$, de sorte qu'en « recollant » x^+ et x^- , le degré de x est égal à 2 dans le sous-graphe de Γ déterminé par E_i : E_i fournit donc un 2-facteur; on obtient ainsi une 2-factorisation de Γ . $\square$

Théorème 8.4.3. *Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe régulier de degré $2k$ et $t \leq k$ un entier.*

- i) *Si $|V|$ est pair, alors Γ admet une k -factorisation.*
- ii) *Γ admet un $2t$ -facteur.*

Démonstration. i) Si Γ est $2k$ -régulier et connexe alors Γ admet un cycle eulérien C (voir le théorème 2.4.2 d'EULER). Comme le degré de chaque sommet est égal à $2k$, on passe exactement k fois par chaque sommet. De plus comme $2k|V| = \sum_{x \in V} d(x) = 2|E|$, le nombre d'arêtes du graphe est $k|V|$ qui est un nombre pair. En partant d'un sommet x arbitraire et en suivant le cycle C jusqu'à son retour à x , on peut scinder les arêtes en deux sous-ensembles E_1 et E_2 , en plaçant alternativement l'arête parcourue dans E_1 ou E_2 . Chaque sommet $x \in V$ est incident à k arêtes de

E_1 et à k arêtes de E_2 . Ainsi les deux graphes partiels induits par E_1 et E_2 respectivement sont des k -facteurs de Γ et $E = E_1 \sqcup E_2$, ce qui fournit une k -factorisation de Γ .

ii) D'après le théorème 8.4.2 de PETERSEN, ce graphe admet une 2-factorisation. En éliminant un premier 2-facteur du graphe, celui-ci devient $(2k - 2)$ -régulier. En itérant le processus $(k - t)$ fois, on obtient un graphe partiel régulier de degré $2t$. $\square$

Proposition 8.4.4. *Le graphe complet K_{2n} admet une 1-factorisation.*

Démonstration. Si $n = 1$ c'est évident. Supposons que $n \geq 2$; K_{2n} est constitué de $n(2n - 1)$ arêtes. On identifie les sommets de K_{2n} avec les entiers $0, 1, \dots, 2n - 1$. On arrange les sommets $0, 1, \dots, 2n - 2$ en un polygone régulier ayant $2n - 1$ côtés et on installe le sommet $2n - 1$ au centre de ce polygone.

On pose

$$F_0 = \{(0, 2n - 1); (1, 2n - 2); (2, 2n - 3); \dots; (n - 1, n)\},$$

et pour $1 \leq k \leq 2n - 2$,

$$F_k = \{\{k, 2n - 1\}\} \cup \{\{\overline{i + k}, \overline{2n - 1 - i + k}\} : 1 \leq i \leq n - 1\},$$

où $\overline{x}$ désigne le reste de la division euclidienne de x par $2n - 1$. On constate que F_k est constituée de n arêtes et que chaque sommet est l'extrémité d'une seule de ces arêtes : le premier point est clair ; pour le second, il suffit de voir que :

i) lorsque i varie entre 1 et $n - 1$, $\overline{i + k}$ et $\overline{2n - 1 - i + k}$ prennent chacun $n - 1$ valeurs différentes qui sont toutes distinctes de k et de $2n - 1$;

ii) $\overline{i + k} = \overline{2n - 1 - i' + k}$, $1 \leq i, i' \leq n - 1$, implique $\overline{i + i'} = 0$, ce qui n'est jamais possible car $i + i' < 2n - 1$.

F_k est donc un couplage parfait de K_{2n} .

Il s'agit maintenant de montrer que les 1-facteurs F_k induisent une 1-factorisation : pour $k \neq k'$, $F_k \cap F_{k'} = \emptyset$; on a d'abord facilement $\{k', 2n - 1\} \notin F_k$ et $\{k, 2n - 1\} \notin F_{k'}$. D'autre part, si l'on avait $\{i + k, \overline{2n - 1 - i + k}\} = \{i' + k', \overline{2n - 1 - i' + k'}\}$, alors modulo $2n - 1$

$$\begin{cases} i + k & \equiv i' + k' \\ -i + k & \equiv -i' + k' \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} i + k & \equiv -i' + k' \\ -i + k & \equiv i' + k' \end{cases}$$

d'où $2k \equiv 2k' \pmod{2n - 1}$ et $k = k'$ car $0 \leq k, k' \leq 2n - 2$.

Ainsi on a construit $2n - 1$ couplages parfaits F_0 à F_{2n-2} disjoints contenant au total $n(2n - 1)$ arêtes, soit toutes les arêtes de K_{2n} . Ils forment donc une partition des arêtes de K_{2n} , donc une 1-factorisation. $\square$

Une illustration de cette preuve est donnée en figure 8.6

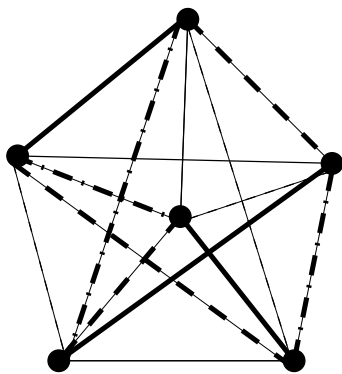


Figure 8.6 – Une 1-factorisation de K_6 .

8.5 Quelques applications des couplages

Soit $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, \dots, F_n)$ une famille quelconque de n parties non vides d'un ensemble X . Un **système de représentants de $\mathcal{F}$** est un ensemble d'éléments distincts $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ tels que $x_i \in F_i$ pour tout $i = 1, 2, 3, \dots, n$. La question de l'existence (ou de la détermination) d'un système de représentants se pose par exemple lorsqu'il s'agit de choisir des représentants des classes à gauche modulo un sous-groupe H d'un groupe G ou plus généralement si on prend un représentant dans chaque classe d'équivalence associée à une partition d'un ensemble X : dans ce cas, la réponse est immédiate car les parties sont disjointes ; le théorème 8.2.1 de HALL permet d'étendre ce résultat.

Proposition 8.5.1. *Soit $\mathcal{F} = (F_1, F_2, F_3, \dots, F_n)$ une famille de n parties non vides F_i d'un ensemble fini X . Alors $\mathcal{F}$ admet un système de représentants si et seulement si pour tout $I \subseteq \{1, 2, 3, \dots, n\}$ on a*

$$\left| \bigcup_{i \in I} F_i \right| \geq |I|. \quad (8.14)$$

Démonstration. On fabrique un graphe biparti $\Gamma = (V_1 \sqcup V_2; E)$ de la façon suivante :

- $V_1 = \mathcal{F}$, $V_2 = X$;
- $e = \{x, F_i\} \in E$ si et seulement si $x \in F_i$.

La question revient ainsi à se demander s'il existe un couplage de $V_1 = \mathcal{F}$; comme ce graphe est sans sommet isolé ($F_i \neq \emptyset$), la condition (8.14) n'est autre que la condition (8.7) du théorème 8.2.1 de HALL, qui fournit donc la réponse souhaitée. $\square$

La combinatoire des matrices est une application intéressante de la notion de couplage. Le contexte (probabiliste) est le suivant :

une chaîne de Markov (homogène) est une suite infinie de variables aléatoires $X_0, X_1, \dots$, prenant leurs valeurs dans un ensemble fini ou dénombrable X (appelé espace des états) de telle sorte que pour tous $x_0, x_1, \dots, x_{t+1} \in X$, la probabilité conditionnelle que $X_{t+1} = x_{t+1}$ sachant que $X_i = x_i$, $i = 0, \dots, t$, ne dépende que de x_t et x_{t+1} ; les probabilités de transition (indépendantes de t), à savoir $p_{xy} = \Pr[X_{t+1} = y \mid X_t = x]$, $x, y \in X$, sont décrites par une matrice $P = (p_{xy})_{x,y \in X}$ à coefficients positifs ou nuls, vérifiant pour tout $x \in X$: $\sum_y p_{xy} = 1$. Cette matrice est stochastique :

soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ une matrice carrée réelle d'ordre n , avec $0 \leq a_{ij} \leq 1$; on dit que A est une matrice **stochastique** si pour tout $i = 1, \dots, n$ on a $\sum_j a_{ij} = 1$. On dit que A est **doublement stochastique** ou plus simplement **bistochastique** si de plus pour tout $j = 1, \dots, n$ on a $\sum_i a_{ij} = 1$.

Les matrices doublement stochastiques les plus simples sont les **matrices de permutation** : il y a exactement un coefficient « 1 » sur chaque ligne et sur chaque colonne, les autres coefficients étant nuls ; si P est une telle matrice et si une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$, P représente dans cette base l'application linéaire qui permute les e_i selon P .

Le résultat suivant est dû à D. KÖNIG.

Théorème 8.5.2 (KÖNIG, 1916). *Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ une matrice carrée avec $a_{ij} \in \{0, 1\}$ et telle que la somme des coefficients de chaque ligne (respectivement chaque colonne) soit égale à k , $k \geq 1$. Alors A est la somme de k matrices de permutation.*

Démonstration. On associe à A le graphe biparti $\Gamma = (V_1 \sqcup V_2; E)$ suivant :

- V_1 est l'ensemble des lignes $l_1, l_2, \dots, l_n$;
- V_2 est l'ensemble des colonnes $c_1, c_2, \dots, c_n$;
- $\{l_i, c_j\} \in E$ si et seulement si $a_{i,j} = 1$.

Puisque chaque ligne (respectivement chaque colonne) contient exactement k coefficients « 1 », le graphe Γ biparti est régulier de degré k . Donc d'après le ii) de la proposition 8.4.1, ce graphe possède une 1-factorisation relative à la partition $E = E_1 \sqcup E_2 \sqcup \dots \sqcup E_k$. Pour $1 \leq r \leq k$, soit $P_r = (p_{ij}(r))_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice définie de la manière suivante :

$$p_{ij}(r) = \begin{cases} 1 & \text{si l'arête } \{l_i, c_j\} \in E_r, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme E_r est un 1-facteur, il n'existe qu'une arête dans E_r ayant comme extrémité l_i (respectivement c_j) ; par conséquent il n'existe qu'un coefficient « 1 » par ligne (respectivement par colonne) dans la matrice P_r : P_r est donc une matrice de permutation. Et l'on a $A = P_1 + P_2 + \dots + P_k$ car les E_r sont arête-disjoints. $\square$

Rappelons (voir § 5.2) que si W est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, le segment d'extrémités $x, y \in W$ est

$$[x, y] = \{z \in W : \exists \lambda \text{ tel que } z = (1 - \lambda)x + \lambda y, 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Une partie A de W est dite **convexe** si

$$x, y \in A \implies [x, y] \subset A.$$

L'**enveloppe convexe** de A , notée $\text{Conv}(A)$ est la plus petite (au sens de l'inclusion) partie convexe contenant A : puisque l'intersection d'une famille quelconque de parties convexes (de W) reste convexe, $\text{Conv}(A)$ est aussi l'intersection des parties convexes contenant A ; une description concrète est fournie par l'exercice suivant.

Exercice 8.10. Soit $A \subset W$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

i) Montrer que la partie

$$B = \left\{ \xi \in W : \xi = \sum_{1 \leq i \leq m} \lambda_i a_i, a_i \in A, 0 \leq \lambda_i \leq 1, \sum_i \lambda_i = 1 \right\}$$

est une partie convexe contenant A .

ii) Montrer que $B = \text{Conv}(A)$.

Soit $W = \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices carrées $n \times n$ à coefficients réels : $\dim_{\mathbb{R}} W = n^2$.

Théorème 8.5.3 (BIRKHOFF et VON NEUMANN). *L'enveloppe convexe de l'ensemble $\mathcal{P}$ des matrices de permutation (dans $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$) est l'ensemble des matrices doublement stochastiques.*

Démonstration. Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices doublement stochastiques ; il s'agit de démontrer $\mathcal{S} = \text{Conv}(\mathcal{P})$.

i) $\mathcal{S}$ est convexe :

soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices doublement stochastiques et λ tel que $0 \leq \lambda \leq 1$. On pose $C = \lambda A + (1 - \lambda)B$. Avec des notations évidentes, on a

$$\begin{aligned} \sum_j c_{ij} &= \sum_j (\lambda a_{ij} + (1 - \lambda)b_{ij}) = \lambda \sum_j a_{ij} + (1 - \lambda) \sum_j b_{ij} \\ &= \lambda + (1 - \lambda) = 1. \end{aligned}$$

De même pour les $\sum_i c_{ij}$, les sommes des coefficients prises par colonne. On en déduit que C est bien bistochastique.

ii) Montrons $\mathcal{S} \subseteq \text{Conv}(\mathcal{P})$.

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice doublement stochastique : $0 \leq a_{ij} \leq 1$ et les sommes des coefficients de chaque ligne et de chaque colonne sont égales à 1 ; on associe à A , comme dans le théorème 8.5.2 de KÖNIG, un graphe biparti $\Gamma = (V_1 \sqcup V_2; E)$ défini par :

- V_1 est l'ensemble des lignes $l_1, l_2, \dots, l_n$;
- V_2 est l'ensemble des colonnes $c_1, c_2, \dots, c_n$;
- $\{l_i, c_j\} \in E$ si et seulement si $a_{ij} \neq 0$.

Montrons que la condition (8.8) du théorème 8.2.1 de HALL est satisfaite pour ce graphe.

Soit $X \subset V_1$, on a alors

$$\begin{aligned} \Gamma(X) &= \{c_j \in V_2, \exists l_i \in X : \{l_i, c_j\} \in E\} \\ &= \{c_j \in V_2, \exists l_i \in X : a_{ij} \neq 0\} ; \end{aligned}$$

d'où puisque $[a_{ij}]$ vaut 1 ou 0 selon que $\{l_i, c_j\}$ est dans E ou non,

$$|\Gamma(X)| = \sum_{l_i \in X} \sum_{c_j \in V_2} [a_{ij}],$$

où pour $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ désigne l'entier immédiatement supérieur à x ; par conséquent

$$|\Gamma(X)| \geq \sum_{l_i \in X} \sum_{c_j \in V_2} a_{ij} = \sum_{l_i \in X} 1 = |X|.$$

on procède de même pour $Y \in V_2$ et on obtient également $|\Gamma(Y)| \geq |Y|$. D'après le théorème 8.2.1 de HALL, Γ admet un couplage parfait C . Définissons maintenant $P = (p_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ par :

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si l'arête } \{l_i, c_j\} \in C, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

C étant un couplage parfait, P est une matrice de permutation (pour les mêmes raisons que celles de la preuve du théorème 8.5.2 de KÖNIG).

On pose

$$\lambda = \min_{1 \leq i, j \leq n} \{a_{ij} : p_{ij} \neq 0\} \quad \text{et} \quad B = A - \lambda P = (b_{ij}).$$

On a clairement $0 \leq \lambda \leq 1$ et même $\lambda \neq 0$ car $p_{ij} \neq 0$ implique $a_{ij} \neq 0$. De plus $b_{ij} \geq 0$ car si $p_{ij} \neq 0$ alors $p_{ij} = 1$ et $\lambda \leq a_{ij}$. Calculons $\sum_j b_{ij} = \sum_j a_{ij} - \lambda p_{ij} = 1 - \lambda$ et $\sum_i b_{ij} = \sum_i a_{ij} - \lambda p_{ij} = 1 - \lambda$:

- si $\lambda = 1$ on constate que tous les b_{ij} sont nuls, donc $A = P \in \mathcal{P}$;
- sinon $0 < \lambda < 1$; les calculs précédents montrent que la matrice $A' = \frac{1}{1-\lambda}B$ est doublement stochastique ; de plus

$$A = \lambda P + B = \lambda P + (1 - \lambda)A' ;$$

comme il existe des indices i, j tels que $a_{ij} = \lambda$, on a $a'_{ij} = \frac{1}{1-\lambda}b_{ij} = \frac{1}{1-\lambda}(a_{ij} - \lambda p_{ij}) = \frac{1}{1-\lambda}(\lambda - \lambda \times 1) = 0$, de sorte que A' a au moins un coefficient nul de plus que A et est doublement stochastique. On a donc montré qu'une matrice A doublement stochastique peut s'écrire comme **combinaison linéaire convexe** (*i.e.* les coefficients de la combinaison linéaire sont positifs et leur somme vaut 1) d'une matrice de permutation P et d'une matrice doublement stochastique A' ayant un coefficient nul de plus (par rapport à A) ; en itérant le même procédé à A' et à ses successeurs autant de fois que nécessaire, on finit par obtenir $A = \sum_{1 \leq k \leq m} \mu_k P_k$, où les P_k sont des matrices de permutation et $\sum_k \mu_k = 1$. On a bien $A \in \text{Conv}(\mathcal{P})$; on peut noter qu'on appliquera ce procédé de réduction du nombre de coefficients non nuls au plus $n^2 - n$ fois puisque la matrice A a au plus n^2 coefficients non nuls et que la matrice finale P_m est une matrice de permutation, donc ayant n coefficients non nuls. $\square$

Remarque 8.5.4. L'application de ce théorème au cas des matrices régulières A de degré k (i.e. matrices d'adjacence d'un graphe régulier de degré k) fournit un résultat moins bon que celui du théorème 8.5.2 de KÖNIG, puisqu'on obtient seulement que A est somme d'au plus nk matrices de permutation.

Donnons une autre application du théorème 8.2.1 de HALL. D'abord une définition : les lignes et les colonnes d'une matrice $m \times n$ sont appelées **rangées** de la matrice. Il y a donc $m + n$ rangées.

Théorème 8.5.5 (KÖNIG et EGERVÁRY, 1931). *Soit A une matrice $m \times n$ dont les coefficients sont des « 0 » et des « 1 ». Le nombre maximum de « 1 » que l'on peut sélectionner dans A de telle sorte que deux quelconques d'entre eux ne soient pas pris sur une même rangée est égal au nombre minimum de rangées contenant tous les coefficients « 1 » de A .*

Démonstration. La matrice A est associée au graphe biparti $\Gamma = (V_1 \sqcup V_2; E)$, les lignes de A étant les sommets de V_1 , les colonnes les sommets de V_2 .

Un couplage de Γ est un ensemble d'arêtes non incidentes, c'est-à-dire un ensemble de « 1 » sur des rangées distinctes.

Un transversal de Γ est un ensemble de rangées contenant tous les « 1 » de A .

Le résultat à démontrer est simplement l'identité $\alpha'(\Gamma) = \beta(\Gamma)$: elle a été énoncée et prouvée dans le théorème 8.1.5 de KÖNIG. $\square$

Exercice 8.11. Comparer le théorème 8.5.5 et le théorème 8.1.5.

Exemples d'applications

Dans une entreprise, la fabrication d'un produit nécessite cinq opérations distinctes qui sont réalisées de manière simultanée sur cinq machines-outils différentes. Le temps en minutes pour chaque opération est donné par le tableau ci-dessous.

	MO 1	MO 2	MO 3	MO 4	MO 5
Opération 1	5	6	3	7	5
Opération 2	6	7	2	3	6
Opération 3	3	4	6	3	5
Opération 4	5	10	3	2	9
Opération 5	2	7	8	4	6

Par exemple, on peut choisir d'assigner l'opération 1 à la machine 3, l'opération 2 à la machine 1, l'opération 3 à la machine 4, l'opération 4 à la machine 2 et l'opération 5 à la machine 5. Le temps nécessaire pour la fabrication du produit est donc en minutes égal à $\max\{3, 6, 3, 10, 6\} = 10$. Est-il possible d'assigner les opérations aux machines de telle sorte que le processus de fabrication soit réalisé en au plus cinq minutes ?

Pour cela on va créer une matrice C dont les coefficients sont des « 0 » et des « 1 » de la manière suivante :

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si l'opération } i \text{ réalisée sur la machine } j \\ & \text{prend au plus 5 minutes,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On obtient la matrice suivante :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 1 & \boxed{1} & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \boxed{1} & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le nombre maximum de coefficients « 1 » que l'on peut prendre sur des rangées différentes (voir théorème 8.5.5 de KÖNIG-EGERVÁRY) est égal à 5 : les coefficients « 1 » encadrés dans la matrice C sont répartis de telle sorte qu'il y en a exactement un par rangée. Cela implique que la réponse à la question posée est affirmative.

Le nombre minimum de rangées relatif au théorème 8.5.5 de KÖNIG-EGERVÁRY est donc aussi égal à 5.

Carrés latins

Un **rectangle latin** est une matrice $M = (m_{ij})$ de taille $m \times n$ dont les coefficients sont des entiers et vérifiant les propriétés suivantes :

- i) $1 \leq m_{i,j} \leq n$;
- ii) les coefficients de chaque ligne, de chaque colonne sont distincts.

Si $m = n$ on obtient un **carré latin** : les *sudokus* sont des carrés latins 9×9 très particuliers. Les deux matrices suivantes illustrent ces notions :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit M un rectangle latin $m \times n$ avec $m < n$. Peut-on adjoindre $n - m$ lignes à M de telle sorte que la matrice carrée obtenue soit un carré latin ? La réponse à cette question est donnée par le théorème suivant.

Théorème 8.5.6. *Soit M un rectangle latin de taille $m \times n$ avec $m < n$. Alors M peut être étendue en un carré latin par addition de $n - m$ nouvelles lignes.*

Démonstration. Il suffit de montrer que M peut être étendue en un rectangle latin de taille $(m + 1) \times n$.

Soit $N \subset \{1, 2, \dots, n\}$ l'ensemble des entiers qui apparaissent dans le rectangle latin M . Posons $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ où, pour chaque i , F_i est l'ensemble constitué des éléments de N qui **ne sont pas** dans la i -ième colonne de M . Si on démontre que $\mathcal{F}$ admet un système de représentants, c'est-à-dire un ensemble de n entiers (distincts) appartenant chacun à un seul des F_i , alors le résultat s'en déduira en prenant pour coefficients de la ligne additionnelle les membres du système de représentants $x_1, \dots, x_n$, dans cet ordre. La matrice ainsi étendue vérifiera par construction les propriétés i) et ii) requises. Pour établir cela, il suffit de vérifier que les conditions (8.7) du théorème 8.2.1 de HALL sont satisfaites :

soit $X = \{F_{i_1}, F_{i_2}, \dots, F_{i_k}\}$ un sous-ensemble de $k \leq n$ éléments de $\mathcal{F}$. Alors les $(n - m)k$ entiers (pas forcément distincts) appartenant à l'un ou l'autre des F_i forment un sous-ensemble de N . Puisque chaque élément $x \in N$ apparaît exactement une fois sur chaque ligne, x apparaît exactement m fois dans M , donc se trouve sur m colonnes de M et donc est absent des $n - m$ autres colonnes, c'est-à-dire qu'il se trouve dans $n - m$ des parties F_i exactement. Supposons maintenant que $\bigcup_{1 \leq l \leq k} F_{i_l}$ contienne moins de k éléments différents. Puisque $\bigcup_{1 \leq j \leq k} F_{i_j}$ est la réunion de k ensembles à $n - m$ éléments, il y a dans cette réunion nécessairement un élément qui est répété plus de $n - m$ fois ; mais cela contredit le fait que chaque élément est répété exactement $n - m$ fois dans $\bigcup_{1 \leq i \leq k} F_i$. Ainsi $|\Gamma(X)| \geq |X|$. $\square$

La matrice suivante est une illustration du théorème 8.5.6 ; on passe d'un rectangle 3×5 à un carré 5×5 :

$$M_2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 8.12. Trouver deux façons de compléter le rectangle 2×5 suivant en un carré latin :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

8.6 Généralisation de la notion de facteur

Nous finissons ce chapitre sur un concept plus sophistiqué : la notion de f -facteur.

Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe **sans boucle ni sommet isolé** et soit $f : V \rightarrow \mathbb{N}$ une application. Un **f -facteur** de Γ est un graphe partiel Γ' de Γ tel que pour tout sommet $x \in V$ le degré de x dans Γ' est égal à $f(x)$ (cela impose $f(x) \leq d(x)$ pour tout x sommet de Γ). Cette notion généralise celle de k -facteur (pour lequel f est simplement la fonction constante égale à k). Une question intéressante est de savoir à quelle condition un graphe admet un f -facteur et comment caractériser les graphes qui ont cette propriété.

Pour ce faire nous allons définir à partir du graphe $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe simple auxiliaire $\Gamma_f = (V_f; E_f)$, par une procédure d'**éclatement** :

- d'abord nous supposons que $f(x) \leq d(x)$ pour tout $x \in V$ (sinon le graphe n'a pas de f -facteur) ;
- remplaçons chaque sommet $x \in V$ par un graphe biparti complet $K_{d(x), e(x)} = (D(x) \sqcup F(x); E)$ où $D(x)$ est un ensemble à $d(x)$ éléments et $F(x)$ un ensemble à $e(x) = d(x) - f(x)$ éléments (si $d(x) = f(x)$ le graphe est constitué de $d(x)$ sommets isolés). Γ étant sans sommet isolé, cette construction a toujours un sens ;
- on remplace chaque p -arête $a = \{x, y\}$ de Γ par p arêtes disjointes $\{x_i(a), y_i(a)\}$, $i = 1, \dots, p$: lorsque a et i varient, les $x_i(a) \in D(x)$ sont choisis distincts et les $y_i(a) \in D(y)$ également.

Exemple 8.6.1. Cette procédure d'éclatement du graphe Γ selon f est décrite par les figures 8.7, 8.8 et 8.9. La figure 8.7 représente un graphe que l'on souhaite éclater selon la fonction f définie par $f(x_1) = 3$, $f(x_2) = 1$, $f(x_3) = 2$, $f(x_4) = 3$, $f(x_5) = 1$, $f(x_6) = 2$ (les $f(x_i)$ sont indiqués sur la figure 8.7).

La figure 8.8 rend compte de l'éclatement de Γ : construction du graphe Γ_f correspondant au graphe Γ de la figure 8.7 ; le 1-facteur est dessiné en pointillé et est reproduit en figure 8.9. On peut vérifier que dans cette situation, c'est l'unique f -facteur de Γ .

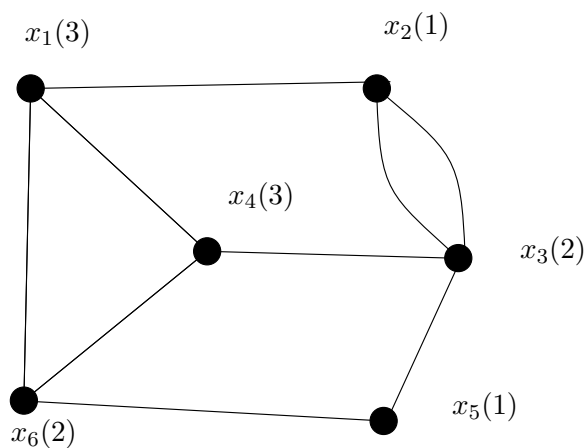


Figure 8.7 – Un graphe Γ à éclater.

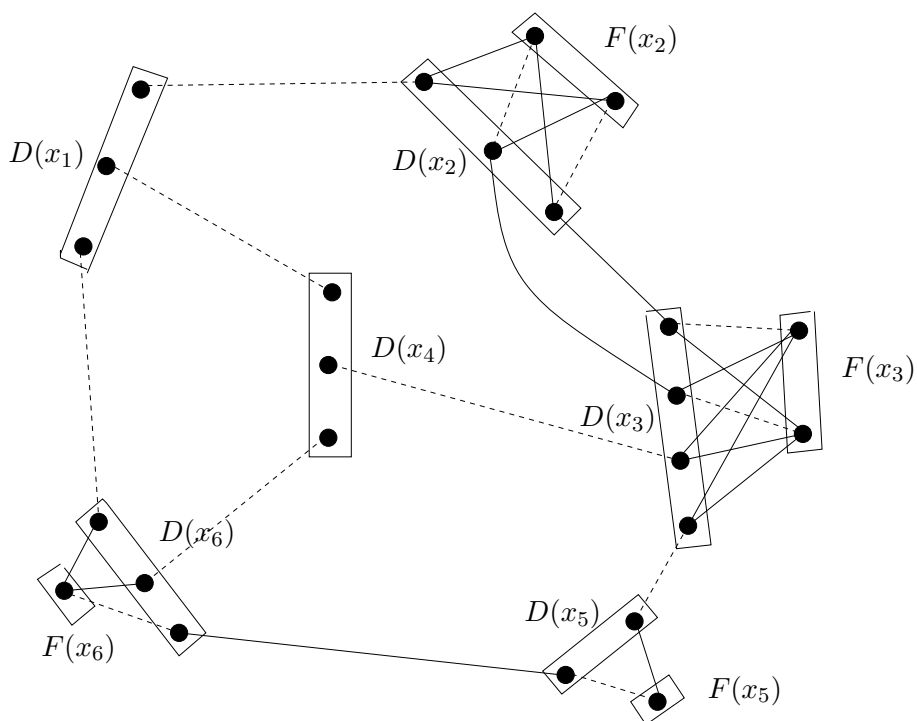
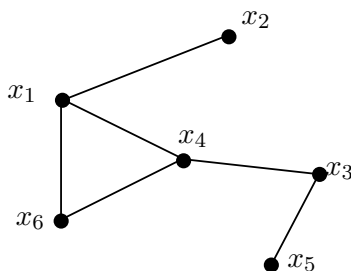


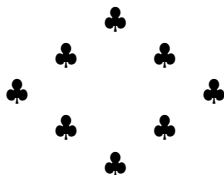
Figure 8.8 – Le graphe éclaté Γ_f .

Figure 8.9 – Un f -facteur de Γ .

Proposition 8.6.2. *Un graphe $\Gamma = (V; E, N)$ sans boucle ni sommet isolé admet un f -facteur si et seulement si le graphe $\Gamma_f = (V_f; E_f, N_f)$ construit comme ci-dessus admet un 1-facteur.*

Démonstration. Supposons que Γ admette un f -facteur : les arêtes correspondantes dans Γ_f sont incidentes à $f(x)$ sommets de $D(x)$ pour chaque $x \in V$. Cela laisse, dans $D(x)$, $e(x) = |F(x)|$ sommets libres ; on choisit $e(x)$ arêtes dans le graphe biparti $K_{d(x), e(x)}$ joignant chacun de ces sommets libres de $D(x)$ à autant de sommets de $F(x)$. D'où un 1-facteur de Γ_f .

Réciproquement soit C un 1-facteur dans Γ_f ; on supprime dans C les arêtes qui sont incidentes à un sommet de $F(x)$, cela pour tout x sommet de Γ_f . On fusionne ensuite chaque $K_{d(x), e(x)}$ en un seul sommet : cela fournit un f -facteur de Γ . $\square$



Chapitre 9

Automorphismes – Théorie spectrale

Ce chapitre est consacré à une introduction aux aspects algébriques des graphes, c'est-à-dire à l'utilisation de l'algèbre pour décrire les propriétés des graphes. Cela donne des résultats surprenants et élégants ; par exemple tout groupe fini est isomorphe au groupe d'automorphismes d'un graphe. La théorie des groupes et l'algèbre linéaire permettent l'interprétation des caractéristiques combinatoires d'un graphe. Les groupes interviennent principalement dans l'étude des isomorphismes de graphes, les plongements et les symétries de graphes. Inversement les graphes donnent des indications précieuses sur les propriétés des groupes. L'algèbre linéaire, par le biais des valeurs propres, des polynômes caractéristiques, donne des informations importantes sur les paramètres des graphes. Dans tout le chapitre, sauf au § 9.7.3 et au § 9.8, on supposera les **graphes simples et finis**.

9.1 Groupes de permutations

Soit V un ensemble. Une bijection de V dans V est appelée **permutation** de V ; l'ensemble de toutes les permutations de V forme un groupe pour la composition des applications, appelé **groupe symétrique**. On notera ce groupe $\mathfrak{S}_V$; lorsque V est fini on prend pour « modèle » $V = \{1, \dots, n\}$ et on note $\mathfrak{S}_n$ le groupe associé.

Un **groupe de permutations** de V est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_V$. Par exemple soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe simple, nous avons défini au chapitre 1 la notion d'automorphisme. Nous avons vu que l'ensemble des

automorphismes d'un graphe forme un groupe noté $\text{Aut}(\Gamma)$. De là chaque automorphisme de Γ est une permutation de V et $\text{Aut}(\Gamma)$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_V$.

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$; il est commode d'utiliser la notation de CAUCHY :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

σ est une **permutation circulaire** ou un **k -cycle** ou encore un cycle de longueur k , $k \geq 2$, s'il existe x tel que $\sigma^k(x) = x$ et les k éléments $x, \sigma(x), \dots, \sigma^{k-1}(x)$ soient distincts et soient les seuls de $V = \{1, 2, \dots, n\}$ non fixés par σ : pour $y \in V \setminus \{x, \sigma(x), \dots, \sigma^{k-1}(x)\}$, on a $\sigma(y) = y$; on utilisera la notation :

$$\sigma = (x \ \sigma(x) \ \dots \ \sigma^{k-1}(x)) ;$$

cette notation n'est pas unique car on a aussi

$$\sigma = (\sigma^j(x) \ \sigma^{j+1}(x) \ \dots \ \sigma^{j+k-1}(x)),$$

pour tout nombre entier j (par exemple $(1234) = (2341)$).

Le **support d'une permutation** σ est $\text{Supp}(\sigma) = \{x \in V : \sigma(x) \neq x\}$; ainsi le support du 4-cycle (7241) de $\mathfrak{S}_7$ est $\{1, 2, 4, 7\}$.

On constate facilement que deux cycles à supports disjoints commutent : par exemple dans $\mathfrak{S}_7$, on a $(123) \circ (47) = (47) \circ (123)$, où $\circ$ est la loi de composition des applications. Le résultat de base est le suivant.

Théorème 9.1.1. *Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\sigma \neq \text{Id}$: σ se décompose de façon unique (à l'ordre près des facteurs) en produit de cycles disjoints : c'est la décomposition cyclique de σ .*

Exemple 9.1.2. La permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 9 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_9$$

se décompose sous la forme $\sigma = (1478) \circ (265) \circ (39)$.

La décomposition cyclique permet de trouver l'**ordre** $o(\sigma)$ d'une permutation σ , c'est-à-dire le plus petit entier $k \geq 1$ tel que $\sigma^k = \text{Id}$. Si σ est un k -cycle ($k \geq 2$), alors son ordre est égal à k c-à-d le cardinal de son support.

Proposition 9.1.3. *Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n \setminus \{\text{Id}\}$, $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \cdots \circ \sigma_r$ sa décomposition cyclique ; alors*

$$o(\sigma) = \text{ppcm}_{1 \leq i \leq r} |\text{Supp}(\sigma_i)|.$$

Par exemple, l'ordre de $(1\,2\,5\,9) \circ (3\,4\,7)$ est égal à $\text{ppcm}(4, 3) = 12$.

Exercice 9.1. Soit $\sigma = (6\,2\,4) \circ (2\,5\,3) \circ (8\,7\,6) \circ (4\,5) \in \mathfrak{S}_8$. Calculer σ^{2009} .

Indication : déterminer d'abord la décomposition cyclique de σ .

L'importance des groupes de permutations est notamment due au fameux théorème suivant.

Théorème 9.1.4 (CAYLEY). *Tout groupe G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_X$, où X est un ensemble non vide (pouvant être choisi égal à G).*

Démonstration. On plonge G dans $\mathfrak{S}_G$ de la façon suivante : à $g \in G$ on associe $\gamma_g \in \mathfrak{S}_G$ définie par $\gamma_g(x) = gx$; il est très facile de vérifier que $\gamma_g \in \mathfrak{S}_G$, que $g \mapsto \gamma_g$ est un homomorphisme et enfin que cet homomorphisme est injectif.

On peut tout aussi bien utiliser les translations à droite :

$$\begin{aligned} G &\xrightarrow{\delta} \mathfrak{S}_G \\ g &\mapsto \delta_g : x \mapsto xg^{-1}, \end{aligned}$$

où l'on a pris soin de définir la translation à droite par la multiplication (à droite) par g^{-1} , et non par g , afin que δ soit bien un homomorphisme ! $\square$

9.2 Groupes d'automorphismes d'un graphe et line-graphe

9.2.1 Automorphismes, automorphismes d'arêtes

Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe simple ; un automorphisme de Γ est un isomorphisme de Γ dans lui-même (voir § 7.4). On peut donc le caractériser ainsi :

$$\text{Aut}(\Gamma) = \{f : V \longrightarrow V \text{ bijective vérifiant } [PA]\}$$

où $[PA]$ est la propriété d'adjacence :

$$\{x, y\} \in E \iff \{f(x), f(y)\} \in E. \quad [PA]$$

On voit que $\text{Aut}(\Gamma) \subset \mathfrak{S}_V$. L'étude de $\text{Aut}(\Gamma)$ rend compte des propriétés de symétrie du graphe Γ : si le groupe $\text{Aut}(\Gamma)$ est « gros », alors de nombreux sommets jouent le même rôle à l'intérieur de Γ : la complexité de la structure locale de Γ , déterminée par son comportement en un sommet donné, ou plus généralement autour d'un groupement de sommets, pourra être renseignée, tout du moins partiellement, par la structure de $\text{Aut}(\Gamma)$: le graphe complet sur les sommets de V a son groupe d'automorphismes coïncidant avec $\mathfrak{S}_V$; le graphe sans arête a également pour groupe d'automorphismes $\mathfrak{S}_V$. Dans ces deux cas extrêmes, la symétrie du graphe Γ est forte, ce qui est clairement indiqué par son groupe d'automorphismes.

Notons qu'un automorphisme de graphe conserve le degré en chaque sommet (mais ça n'est évidemment pas suffisant) et par voie de conséquence la distribution des degrés du graphe. Cela permet de construire des graphes ayant un groupe d'automorphismes trivial, c'est-à-dire réduit à $\{\text{Id}\}$, comme le graphe Γ représenté en figure 9.1.

Exercice 9.2.

- i) Montrer que le graphe Γ représenté en figure 9.1 a un groupe d'automorphismes trivial.
- ii) Montrer qu'il y a exactement un isomorphisme entre Γ_1 et Γ_2 .

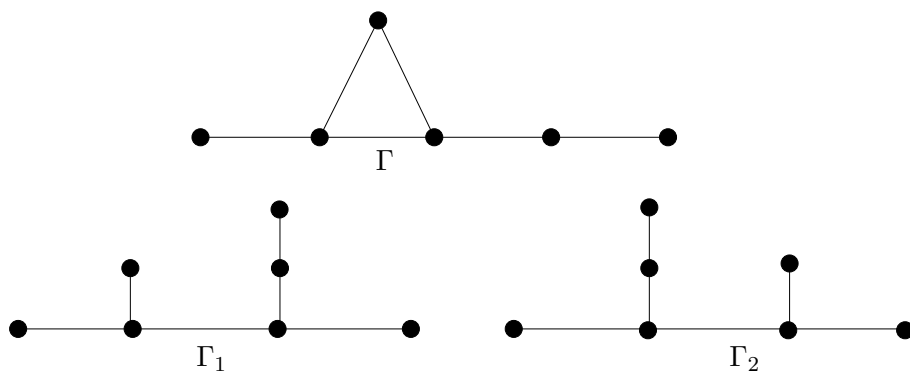


Figure 9.1 – $\text{Aut}(\Gamma) = \{\text{Id}\}$. Γ_1 et Γ_2 sont isomorphes.

Si $f \in \text{Aut}(\Gamma)$, alors f doit « envoyer » une partie connexe sur une partie connexe (voir exercice 7.8) ; on a même une situation beaucoup plus précise :

une partie C de $V(\Gamma)$ est appelée **composante connexe** de Γ si C est

connexe et maximale (c'est-à-dire si pour tout $x \notin C$, la réunion $C \cup \{x\}$ n'est pas connexe); par ailleurs il est clair que si C et C' sont connexes et $C \cap C' \neq \emptyset$, la réunion $C \cup C'$ est aussi connexe; il s'ensuit que les composantes connexes forment une partition de V :

$$V(\Gamma) = \bigsqcup_{C \in \mathcal{C}} C$$

où $\mathcal{C}$ est l'ensemble de toutes les composantes connexes de Γ .

Par exemple une composante connexe du type $C = \{x\}$ désigne un sommet isolé; une composante $C = \{x, y\}$ désigne une composante du type K_2 (arête isolée).

Du fait qu'un automorphisme de Γ permute les composantes connexes isomorphes, il est naturel de les regrouper via la relation d'équivalence $\mathcal{R}$:

$$C \mathcal{R} C' \text{ si et seulement si } \Gamma(C) \simeq \Gamma(C') ;$$

on obtient une partition en classes d'équivalence de l'ensemble des composantes connexes $\mathcal{C} : \mathcal{C}_\alpha$, $\alpha \in \{1, 2, \dots, t\}$, t étant le nombre de classes d'équivalence; on choisit C_α , $\alpha \in \{1, 2, \dots, t\}$, un représentant de chaque classe d'équivalence $\mathcal{C}_\alpha$; on pose : $\mathbf{C}_\alpha = \bigsqcup_{C \in \mathcal{C}_\alpha} C$ et ainsi

$$V(\Gamma) = \bigsqcup_{\alpha=1}^t \mathbf{C}_\alpha.$$

Avec les notations précédentes, on a :

Proposition 9.2.1.

$$\text{Aut}(\Gamma) \simeq \prod_{\alpha \in A} \text{Aut}(\Gamma(\mathbf{C}_\alpha)).$$

Ce résultat généralise le théorème 1.9.4 du chapitre 1.

Il reste à « dévisser » chacun des $\text{Aut}(\Gamma(\mathbf{C}_\alpha))$.

Pour chaque $X \simeq C_\alpha$ on fixe un isomorphisme $\gamma_X : C_\alpha \longrightarrow X$ (avec $\gamma_{C_\alpha} = \text{Id}_{C_\alpha}$); pour $f \in \text{Aut}(\Gamma(\mathbf{C}_\alpha))$ et pour tout $X \in \mathcal{C}_\alpha$, on considère l'automorphisme « intérieur » de $\Gamma(C_\alpha)$

$$C_\alpha \xrightarrow{\gamma_X} X \xrightarrow{f|_X} f(X) \xrightarrow{\gamma_{f(X)}^{-1}} C_\alpha,$$

en particulier $\gamma_{f(X)}^{-1} \circ f|_X \circ \gamma_X \in \text{Aut}(\Gamma(C_\alpha))$; de plus f réalise une permutation des composantes connexes X isomorphes à C_α , donc détermine

une permutation σ_f de $\mathfrak{S}_n$, où n est le cardinal de $\mathcal{C}_\alpha$: intuitivement σ_f exprime la permutation des composantes connexes et les $\gamma^{-1} \circ f|_X \circ \gamma$ représentent l'effet de f sur X , effet traduit en un automorphisme unique de $\Gamma(C_\alpha)$ via les isomorphismes γ_Y ; donc $\text{Aut}(\Gamma(\mathbf{C}_\alpha))$ a le même ordre que $(\text{Aut}(\Gamma(C_\alpha)))^n \times \mathfrak{S}_n$. De façon précise

Théorème 9.2.2. *Soit n le nombre de composantes connexes C du graphe Γ isomorphes à C_α : $\Gamma(C) \simeq \Gamma(C_\alpha)$. Soit $\mathbf{C}_\alpha = \bigsqcup_{\Gamma(C) \simeq \Gamma(C_\alpha)} C$. Alors*

- i) $\text{Aut}(\Gamma(\mathbf{C}_\alpha)) \simeq \text{Aut}(\Gamma(C_\alpha)) \wr \mathfrak{S}_n$;
- ii) *en particulier* $|\text{Aut}(\Gamma(\mathbf{C}_\alpha))| = |\text{Aut}(\Gamma(C_\alpha))|^n n!$.

La preuve dépasse le cadre de ce livre ; $G \wr H$ désigne le produit en couronne de deux groupes G et H .

Désormais nous bornerons notre étude de $\text{Aut}(\Gamma)$ aux graphes Γ **connexes ayant au moins une arête**.

Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe. On définit maintenant une notion duale à celle d'automorphisme introduite ci-dessus : un **automorphisme d'arêtes** de Γ est une permutation f de E telle que :

$$\epsilon(a) \cap \epsilon(b) \neq \emptyset \iff \epsilon(f(a)) \cap \epsilon(f(b)) \neq \emptyset. \quad [PA]_E$$

On définit également de manière analogue un **isomorphisme d'arêtes**. On dira que deux graphes sont **arête-isomorphes** s'il existe un isomorphisme d'arêtes entre ces deux graphes. On note $\text{Isom}_E(\Gamma_1, \Gamma_2)$ l'ensemble des isomorphismes d'arêtes de Γ_1 dans Γ_2 .

Exercice 9.3. Montrer que l'ensemble des automorphismes d'arêtes d'un graphe $\Gamma = (V; E)$ forme un groupe, sous-groupe de $\mathfrak{S}_E$.

Ce groupe sera noté $\text{Aut}_E(\Gamma)$.

Cette notion est intimement liée au line-graphe. Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe ; rappelons (voir § 2.4) que le **line-graphe** de Γ , noté $L(\Gamma) = (V'; E')$, est le graphe dont les sommets sont les arêtes de Γ : $V' = E$ et deux sommets sont adjacents si et seulement si les arêtes correspondantes dans Γ sont adjacentes ; il est alors clair (exercice) que

$$\text{Isom}(L(\Gamma_1), L(\Gamma_2)) = \text{Isom}_E(\Gamma_1, \Gamma_2),$$

et en particulier :

$$\text{Aut}(L(\Gamma)) = \text{Aut}_E(\Gamma).$$

On a une application naturelle :

$$\begin{array}{ccc} \text{Isom}(\Gamma_1, \Gamma_2) & \xrightarrow{\alpha_{12}} & \text{Isom}_E(\Gamma_1, \Gamma_2) \\ f & \longmapsto & f|_{E_1} \end{array}$$

où $f|_{E_1} : E_1 \longrightarrow E_2$ est la bijection déduite de f grâce à la propriété d'adjacence $[PA]$.

En particulier :

$$\begin{array}{ccc} \text{Aut}(\Gamma) & \xrightarrow{\alpha_\Gamma} & \text{Aut}_E(\Gamma) \\ f & \longmapsto & f|_E \end{array}$$

où α_Γ est un homomorphisme de groupes que nous nous proposons d'étudier.

9.2.2 Étude de $\text{Ker } \alpha_\Gamma$

L'homomorphisme α_Γ est presque toujours injectif.

Théorème 9.2.3. *Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe connexe :*

- i) *Si $|E| = 1$, alors $\text{Ker } \alpha_\Gamma \simeq \mathfrak{S}_2$.*
- ii) *Si $|E| \geq 2$, alors $\text{Ker } \alpha_\Gamma = \{\text{Id}_V\}$.*

Démonstration. Si $|E| = 1$, $\Gamma \simeq K_2$; on voit sans difficulté que $\text{Aut}(\Gamma) \simeq \mathfrak{S}_2$ et $\text{Aut}_E(\Gamma) = \{\text{Id}_E\}$.

Supposons $|E| \geq 2$; soit $f \in \text{Ker } \alpha_\Gamma$, c'est-à-dire $f|_E = \text{Id}_E$; soit $x \in V$; comme Γ est connexe et $|E| > 1$, il existe $a = \{x, y\} \in E$; de la condition $f(a) = a$, il s'ensuit que $\{f(x), f(y)\} = \{x, y\}$; il reste à montrer que $f(x) = x$ et $f(y) = y$: sinon on aurait $f(x) = y$ et $f(y) = x$; mais comme $|E| \geq 2$ et que Γ est connexe, il y a au moins une autre arête $\{x, t\}$, $t \neq y$, ou $\{y, t\}$, $t \neq x$; par symétrie on peut supposer que $\{x, t\} \in E$, on a donc $\{f(x), f(t)\} = \{x, t\}$ qui force $f(x) \in \{x, t\}$, absurde. $\square$

9.2.3 Étude de $\text{Im } \alpha_\Gamma$

Un automorphisme de $\text{Im } \alpha_\Gamma$ est souvent appelé **automorphisme d'arêtes induit**; le groupe $\text{Im } \alpha_\Gamma$ est noté $\text{Aut}^\#(\Gamma)$.

Le théorème 9.2.3 donne immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 9.2.4. *Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe connexe, alors $\text{Aut}(\Gamma) \simeq \text{Aut}^\#(\Gamma)$ si et seulement si $|E| \geq 2$.*

Le morphisme α_Γ peut être surjectif et dans ce cas tout automorphisme d'arêtes provient d'un automorphisme du graphe; considérons les deux graphes représentés en figure 9.2 :

- $\text{Aut}(K_3) \simeq \mathfrak{S}_3$; il est facile de voir que $L(K_3) \simeq K_3$ d'où $\text{Aut}_E(K_3)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$ et α_{K_3} est un isomorphisme ;
- $\text{Aut}(K_{1,3}) \simeq \mathfrak{S}_3$; $\text{Aut}_E(K_{1,3}) = \text{Aut}(L(K_{1,3}))$ et il est immédiat que $L(K_{1,3}) \simeq K_3$, donc $\text{Aut}_E(K_{1,3}) \simeq \mathfrak{S}_3$ et $\alpha_{K_{1,3}}$ est un isomorphisme.

Remarquons au passage que $K_3 \not\simeq K_{1,3}$, alors que $L(K_3) \simeq L(K_{1,3}) : K_3$ et $K_{1,3}$ sont arête-isomorphes.

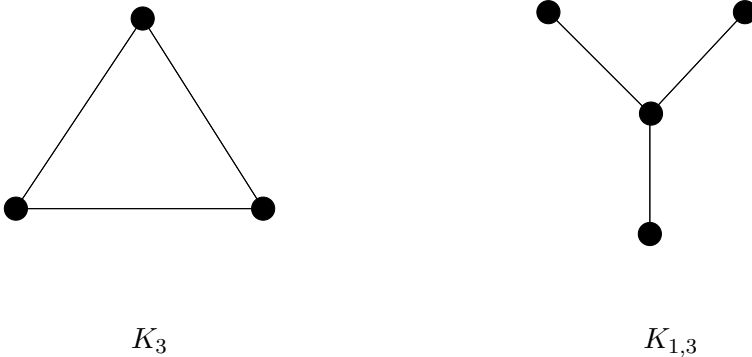


Figure 9.2 – α_{K_3} et $\alpha_{K_{1,3}}$ sont surjectifs.

En revanche, la figure 9.3 montre que le morphisme α_Γ n'est pas toujours surjectif.

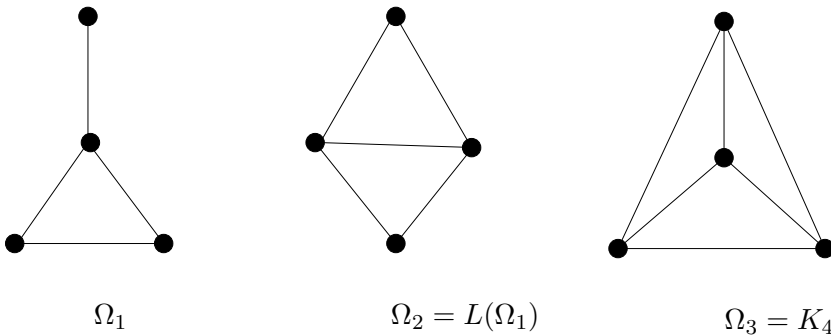


Figure 9.3 – Trois graphes Ω_i tels que α_{Ω_i} n'est pas surjectif.

Exercice 9.4. On considère les graphes Ω_1 et Ω_2 de la figure 9.3.

- Démontrer les faits suivants : $\text{Aut}(\Omega_1) \simeq \mathfrak{S}_2$, $L(\Omega_1) \simeq \Omega_2$ et $\text{Aut}_E(\Omega_1) \simeq \mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_2$.

- ii) Montrer que $\text{Aut}(\Omega_2) \simeq \mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_2$. Déterminer $L(\Omega_2)$ et en déduire que $\text{Aut}_E(\Omega_2) \simeq \mathfrak{S}_4$.
- iii) En déduire que α_{Ω_i} n'est pas surjectif pour $i = 1, 2$.

Exercice 9.5. On considère le graphe Ω_3 de la figure 9.3.

- i) Établir que $\text{Aut}(\Omega_3) \simeq \mathfrak{S}_4$.
- ii) Déterminer $L(\Omega_3)$ (c'est un graphe 3-régulier à 6 sommets).
- iii) Montrer qu'il y a dans $\text{Aut}(L(\Omega_3))$ un cycle de longueur 6.
- iv) Montrer que $\mathfrak{S}_4$ ne contient pas d'élément d'ordre 6 (utiliser les résultats du § 9.1) et en déduire que α_{Ω_3} n'est pas surjectif.

Cependant α_Γ est souvent surjectif; cela résulte d'un résultat plus général.

Théorème 9.2.5 (WHITNEY, 1932). *Soient Γ_1, Γ_2 deux graphes ayant au moins deux sommets, connexes et non isomorphes à l'un des cinq graphes $K_3, K_{1,3}, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$; Alors l'application*

$$\begin{array}{ccc} \text{Isom}(\Gamma_1, \Gamma_2) & \xrightarrow{\alpha_{12}} & \text{Isom}_E(\Gamma_1, \Gamma_2) \\ f & \longmapsto & f|_{E_1} \end{array}$$

est surjective : tout isomorphisme d'arêtes entre Γ_1 et Γ_2 provient d'un isomorphisme entre Γ_1 et Γ_2 .

Nous admettons ce résultat dont la preuve est assez technique¹.

Corollaire 9.2.6. *Si Γ est connexe et n'est pas isomorphe à Ω_1, Ω_2 ou Ω_3 , le morphisme*

$$\begin{array}{ccc} \text{Aut}(\Gamma) & \xrightarrow{\alpha_\Gamma} & \text{Aut}_E(\Gamma) \\ f & \longmapsto & f|_E \end{array}$$

est surjectif.

Si de plus Γ n'est pas isomorphe à K_2 , α_Γ est un isomorphisme et :

$$\text{Aut}(\Gamma) \simeq \text{Aut}_E(\Gamma) = \text{Aut}^\#(\Gamma).$$

Démonstration. Il suffit de prendre $\Gamma_1 = \Gamma_2$ dans le théorème de WHITNEY, en remarquant que α_Γ est surjectif pour $\Gamma = K_3$ ou $K_{1,3}$ (voir figure 9.2). Le théorème 9.2.3 assure l'injectivité. $\square$

Il est clair que $\Gamma_1 \simeq \Gamma_2 \implies L(\Gamma_1) \simeq L(\Gamma_2)$; réciproquement on a le résultat suivant.

1. Voir H. WHITNEY. Congruent graphs and the connectivity of graphs, *Amer. J. Math.* 54 (1932), 150–168.

Corollaire 9.2.7. Soient Γ_1, Γ_2 deux graphes connexes ayant au moins deux sommets et non isomorphes à K_3 ni à $K_{1,3}$. Si $L(\Gamma_1) \simeq L(\Gamma_2)$ alors $\Gamma_1 \simeq \Gamma_2$.

Démonstration. On a : $\text{Isom}(L(\Gamma_1), L(\Gamma_2)) = \text{Isom}_E(\Gamma_1, \Gamma_2)$. Puisque $L(\Gamma_1) \simeq L(\Gamma_2)$, Γ_1 et Γ_2 ne sont isomorphes ni à Ω_1 , ni à Ω_2 , ni à Ω_3 (voir exercices 9.4 et 9.5); on peut donc appliquer le théorème de WHITNEY. $\square$

Un groupe très utile est le suivant : soit X le polygone régulier à n côtés ($n \geq 3$). Les rotations qui laissent X invariant ont pour centre le centre du polygone et ont leur angle dans l'ensemble $\{2k\pi/n, 0 \leq k \leq n-1\}$. Les axes de symétrie de X sont les droites joignant deux sommets diamétralement opposés (respectivement un sommet et le milieu du côté opposé) si n est pair (respectivement impair) : les symétries du plan par rapport à ces n axes de symétrie conservent X . Les $2n$ isométries du plan que l'on obtient forment un groupe appelé **groupe diédral** et noté D_n .

Exercice 9.6. Soit $f \in \text{Aut}(X)$, où $X = \{1, 2, \dots, n\}$ désigne l'ensemble des sommets du polygone régulier à n côtés positionnés dans cet ordre sur un cercle; montrer que si $f(1)$ est fixé, il y a 2 choix pour $f(2)$ et en déduire que $\text{Aut}(X)$ a exactement $2n$ éléments.

Remarque 9.2.8. Pour $n \geq 3$, la structure du groupe D_n peut être explicitée par le produit semi-direct : $D_n \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 9.7. Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe et $\bar{\Gamma} = (V; P_2(V) \setminus E)$ son graphe complémentaire. Démontrer les résultats suivants :

- i) $\text{Aut}(\Gamma) = \text{Aut}(\bar{\Gamma})$.
- ii) Si Γ est connexe et $\text{Aut}(\Gamma) = \mathfrak{S}_V$, alors Γ est complet.
- iii) $\text{Aut}(\Gamma) = \mathfrak{S}_V$ si et seulement si Γ ou $\bar{\Gamma}$ est complet.
- iv) Soit C_n un cycle élémentaire à n sommets : $\text{Aut}(C_n)$ a $2n$ automorphismes : $\text{Aut}(C_n) \simeq D_n$, où D_n est le groupe diédral d'ordre $2n$.

Exercice 9.8.

- i) Déterminer $\text{Aut}(K_{2,3})$.
- ii) Déterminer $\text{Aut}(K_{3,3})$.

Remarque 9.2.9. Le graphe $L_2(n) = L(K_{n,n})$ est appelé le **lattice-graphe** : il a n^2 sommets et $n^2(n-1)$ arêtes.

Le graphe $T(n) = L(K_n)$ est le graphe **triangulaire** : il a $n(n-1)/2$ sommets et $n(n-1)(n-2)/2$ arêtes.

9.3 Graphe de CAYLEY colorié

À un graphe Γ , nous avons associé un groupe, en l'occurrence son groupe d'automorphismes $\text{Aut}(\Gamma)$. On peut réciproquement considérer la question suivante : associer un graphe à un groupe donné.

Soit G un groupe **non nécessairement fini** (dont la loi est notée multiplicativement, son neutre est noté 1) et S une partie non vide de G ne contenant pas 1 ; on note $\langle S \rangle$ le sous-groupe engendré par S , c'est-à-dire l'intersection des sous-groupes contenant S , ou encore le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-groupe de G contenant S ; concrètement $\langle S \rangle$ est l'ensemble des produits $s_1^{\varepsilon_1} s_2^{\varepsilon_2} \dots s_k^{\varepsilon_k}$ où $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$, $s_i \in S$, et $k \geq 0$ (si $k = 0$ le produit est interprété comme égal au neutre 1).

On dit que S est un **système générateur** de G si $\langle S \rangle = G$.

Soit (G, S) un couple, où G est un groupe et S une partie non vide de G . On peut construire un digraphe **simple** associé à (G, S) , noté $\overrightarrow{\text{Cay}}(G, S) = (V, \overrightarrow{E})$ de la manière suivante :

- les sommets du graphe sont les éléments du groupe : $V = G$;
- pour $x, y \in G$, on met un arc (x, y) de x à y s'il existe $s \in S$ tel que $y = sx$; on dit que l'arc (x, y) est « **colorié** » par s (il n'y a donc pas d'arc double ni de boucle).

Ce graphe sera appelé **digraphe de CAYLEY**.

Remarque 9.3.1. Il ne s'agit pas de coloration des arêtes au sens introduit au chapitre 7 ; c'est ici une simple commodité de langage.

Lemme 9.3.2. Si x est un sommet d'un digraphe de CAYLEY alors $d^-(x) \geq 1$ et $d^+(x) \geq 1$.

Démonstration. Soit x un sommet de $\overrightarrow{\text{Cay}}(G, S)$; il y a un arc de x à sx et de $s^{-1}x$ à x ($s \neq 1$). $\square$

Exercice 9.9. Montrer que $\langle S \rangle = G$ si et seulement si le digraphe est fortement connexe.

Exemple 9.3.3. La figure 9.4 donne deux exemples de digraphes de CAYLEY. La figure A donne le digraphe de CAYLEY de $\overrightarrow{\text{Cay}}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \{\bar{1}, \bar{2}\})$ et la figure B donne le digraphe $\overrightarrow{\text{Cay}}(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \{\bar{1}\})$ ($\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ est le groupe cyclique d'ordre k).

Rappelons (voir § 1.9) qu'un automorphisme d'un digraphe simple $\overrightarrow{\Gamma} = (V; \overrightarrow{E})$ est une bijection $f : V \rightarrow V$ vérifiant

$$\forall x, y \in V : (x, y) \in \overrightarrow{E} \iff (f(x), f(y)) \in \overrightarrow{E}. \quad [\overrightarrow{PA}]$$

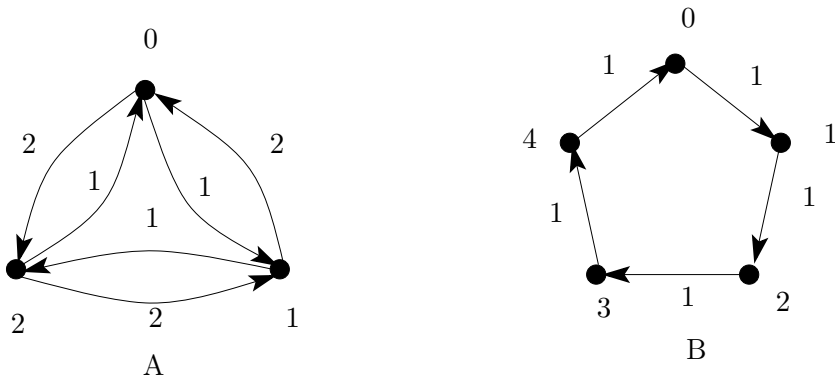


Figure 9.4 – Exemples de graphes de CAYLEY.

Comme dans le cas non orienté l'ensemble des automorphismes d'un digraphe forme un groupe pour la loi de composition, noté $\text{Aut}(\vec{\Gamma})$.

Un automorphisme f d'un digraphe de CAYLEY $\vec{\text{Cay}}(G, S) = (V, \vec{E})$ tel que

$$(x, y) \text{ est colorié par } s \implies (f(x), f(y)) \text{ est colorié par } s$$

est appelé **automorphisme préservant les couleurs**.

Exercice 9.10. Soit $\vec{\text{Cay}}(G, S) = (V, \vec{E})$ un digraphe de CAYLEY. Montrer que l'ensemble des automorphismes préservant les couleurs forme un sous-groupe de $\text{Aut}(\vec{\text{Cay}}(G, S))$ noté $\text{Aut}_{\text{coul}}(\vec{\text{Cay}}(G, S))$.

Une caractérisation des automorphismes préservant les couleurs est donnée par le lemme suivant.

Lemme 9.3.4. Soit (G, S) , $S \neq \emptyset$ et $1 \notin S$; soit $f : V \longrightarrow V$ bijective ; alors $f \in \text{Aut}_{\text{coul}}(\vec{\text{Cay}}(G, S))$ si et seulement si :

$$\forall (x, s) \in G \times S, \quad f(sx) = sf(x). \quad (9.1)$$

Démonstration.

– Supposons que f soit un automorphisme préservant les couleurs ; soient $x \in G$ et $s \in S$: on a $a = (x, sx) \in \vec{E}$ donc $f(a) = (f(x), f(sx)) \in \vec{E}$; mais s colorie a , donc s colorie aussi $f(a)$: $f(sx) = sf(x)$.

– Réciproquement supposons que $f(sx) = sf(x)$ pour tous $x \in G$ et $s \in S$, et montrons que f est un automorphisme : si $(x, y) \in \vec{E}$, alors $y = sx$, donc $f(y) = f(sx) = sf(x)$: $(f(x), f(y)) \in \vec{E}$; et dans l'autre

sens si $(f(x), f(y)) \in \overrightarrow{E}$, on a $f(y) = sf(x)$ et $f(y) = f(sx)$; f étant injective on en déduit $y = sx$, c'est-à-dire $(x, y) \in \overrightarrow{E}$; il est clair que f préserve les couleurs. $\square$

L'intérêt du groupe $\text{Aut}_{\text{coul}}(\overrightarrow{\text{Cay}}(G, S))$ réside dans le résultat suivant.

Théorème 9.3.5. *Soit $G = \langle S \rangle$ un groupe engendré par S avec $S \neq \emptyset$ et $1 \notin S$. Alors $\text{Aut}_{\text{coul}}(\overrightarrow{\text{Cay}}(G, S))$ est isomorphe à G .*

Démonstration. Utilisons le plongement δ du théorème 9.1.4 de CAYLEY :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\delta} & \mathfrak{S}_G \\ g & \longmapsto & \delta_g : x \longmapsto xg^{-1} \end{array}$$

et montrons que $\text{Im } \delta = \text{Aut}_{\text{coul}}(\overrightarrow{\text{Cay}}(G, S))$:

– pour $g \in G$, $\delta_g \in \text{Aut}_{\text{coul}}(\overrightarrow{\text{Cay}}(G, S))$ car δ_g est bijective et $\delta_g(sx) = sxg^{-1} = s\delta_g(x)$; on applique le lemme 9.3.4 : $\text{Im } \delta \subset \text{Aut}_{\text{coul}}(\overrightarrow{\text{Cay}}(G, S))$;

– soit $f \in \text{Aut}_{\text{coul}}(\overrightarrow{\text{Cay}}(G, S))$ donc f satisfait (9.1) :

α) on applique (9.1) avec $x = 1$: $f(s) = sf(1)$,

β) on applique (9.1) avec $x = s^{-1}$: $f(1) = sf(s^{-1})$ d'où $f(s^{-1}) = s^{-1}f(1)$. Plus généralement $f(y) = f(ss^{-1}y) = sf(s^{-1}y)$ par (9.1), donc $f(s^{-1}y) = s^{-1}f(y)$,

γ) soit $x \in G$: $x = s_1^{\varepsilon_1} s_2^{\varepsilon_2} \dots s_k^{\varepsilon_k}$ où $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$, $s_i \in S$ et $k \geq 0$; par récurrence sur k , on obtient en utilisant α) ou β) selon le signe des ε_i ,

$$f(x) = s_1^{\varepsilon_1} f(s_2^{\varepsilon_2} \dots s_k^{\varepsilon_k}) = s_1^{\varepsilon_1} s_2^{\varepsilon_2} \dots s_k^{\varepsilon_k} f(1) = xf(1).$$

Cela montre que $f = \delta_{f(1)^{-1}} \in \text{Im } \delta$. $\square$

Remarque 9.3.6. Cette preuve fonctionne même si le groupe est infini non dénombrable car tout élément du groupe est un produit fini d'éléments de S . Lorsque G est un groupe fini, l'étape β) de la preuve est inutile car $x^{-1} = x^{|G|-1}$, donc tout élément de $\langle S \rangle$ est produit fini d'éléments de S .

9.4 Le problème de KÖNIG

C'est sans doute en 1936 que le premier livre traitant de la théorie des graphes était publié, son auteur étant D. KÖNIG².

Dans cet ouvrage l'auteur pose la question suivante que l'on peut interpréter comme un problème « inverse » :

Quels sont les groupes qui sont isomorphes au groupe des automorphismes d'un graphe ?

Ce problème fut résolu en 1938 par R. FRUCHT en prouvant que tout groupe fini a cette propriété.

Si $G = \{1\}$ il suffit de prendre $\Gamma = K_1$, si $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ il suffit de prendre $\Gamma = K_{1,2}$ ou K_2 . On peut donc supposer que $|G| \geq 3$ et que G est engendré par l'ensemble fini $S = \{s_1, s_2, s_3, \dots, s_t\}$ ne contenant pas 1. La première étape dans la démonstration consiste à construire le digraphe de CAYLEY : $\overrightarrow{\text{Cay}}(G, S)$. D'après le théorème 9.3.5 on a

$$\text{Aut}_{\text{col}}(\overrightarrow{\text{Cay}}(G, S)) \simeq G.$$

La deuxième étape est une transformation de ce digraphe en un graphe Γ de telle sorte que le groupe d'automorphismes $\text{Aut}(\Gamma)$ soit isomorphe à $\text{Aut}_{\text{col}}(\overrightarrow{\text{Cay}}(G, S))$.

L'idée est jolie et simple ! Nous nous proposons de décrire cette transformation.

Méthode de construction

Chaque arc (x, y) colorié par s_i est remplacé par deux « guirlandes » comme illustré sur la figure 9.5.

De façon précise en partant du digraphe $\overrightarrow{\text{Cay}}(G, S) = (V, \overrightarrow{E})$ où $V = G$, on construit un graphe simple non orienté de la façon suivante : pour chaque i , $1 \leq i \leq t$, on modifie tous les arcs coloriés par s_i : si $e = (x, y)$ est un arc de couleur s_i alors

- on remplace e par une chaîne (simple non orientée) (x, x_e^0, y_e^0, y) ;
- on ajoute deux chaînes ou guirlandes (voir figure 9.6) :

$$G_i(x, y) = (x_e^0, x_e^1) \text{ et } G'_i(x, y) = (y_e^0, y_e^1, \dots, y_e^{i+1}).$$

Notons $\Gamma = (W; A)$ le graphe simple obtenu ; intuitivement l'orientation des arcs est « mémorisée » dans Γ par les longueurs des deux guirlandes ajoutées : $|G_i| < |G'_i|$; de plus un automorphisme respecte les longueurs

2. D. KÖNIG. *Theorie der Endlichen und Unendlichen Graphen*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1936.

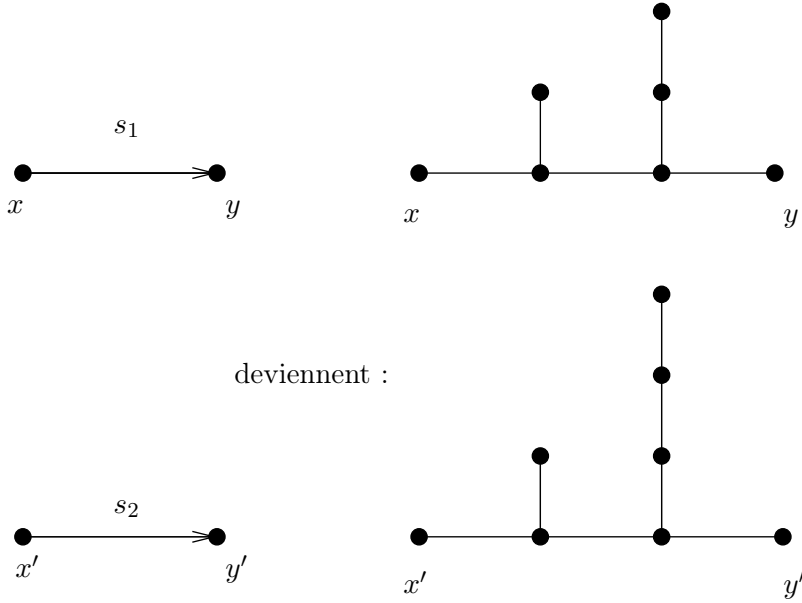


Figure 9.5 – Transformation des arcs en guirlandes. La figure illustre la transformation des arcs coloriés avec s_1 , s_2 : une guirlande de longueur 1, plus une guirlande de longueur 2 pour s_1 , de longueur 3 pour s_2 , $\dots$, de longueur $i + 1$ pour s_i .

des guirlandes G'_i (les guirlandes sont assorties aux couleurs!) et comme il y a un seul isomorphisme entre deux sous-graphes induits $\Gamma_i(x, y) = \Gamma(\{x, x_e^0, x_e^1, y, y_e^0, \dots, y_e^{i+1}\})$ et $\Gamma_i(z, t) = \Gamma(\{z, z_a^0, z_a^1, t, t_a^0, \dots, t_a^{i+1}\})$, le nombre d'automorphismes n'augmente pas.

Définissons un morphisme de groupes :

$$\varphi : \text{Aut}_{\text{coul}}(\overrightarrow{\text{Cay}}(G, S)) \longrightarrow \text{Aut}(\Gamma)$$

par :

- soit $f \in \text{Aut}_{\text{coul}}(\overrightarrow{\text{Cay}}(G, S))$; alors $f : V = G \longrightarrow V$ est bijective; on prolonge f à chaque $\Gamma_i(x, y)$ par l'unique isomorphisme de graphes possible entre $\Gamma_i(x, y)$ et $\Gamma_i(f(x), f(y))$;
- cela donne $\varphi(f) = \tilde{f} \in \text{Aut}(\Gamma)$;
- φ est un homomorphisme;
- φ est clairement injectif;
- le point difficile est la surjectivité de φ : soit $g \in \text{Aut}(\Gamma)$ et soit $e = (x, y)$ coloriée par s_i .

Soient x_e^1 et y_e^{i+1} les deux sommets de degré 1 des deux guirlandes ajoutées à e . D'après le lemme 9.3.2 $g(x_e^1), g(y_e^{i+1}) \in W \setminus V$, ces sommets étant de degré 1 ils ne peuvent être que des extrémités de guirlandes : $g(y_e^{i+1}) = t_a^{j+1}$ où $a = (z, t)$ est coloriée par s_j ; on constate donc que forcément $i = j$. Ainsi e et a ont la même couleur et $g(y_e^i) = t_a^i, \dots, g(y_e^0) = t_a^0$. Comme x_e^0 est adjacent à y_e^0 , $g(x_e^0)$ est adjacent à $g(y_e^0)$, puis $g(x_e^1) = z_a^1$; on en déduit que $g(x) = z$ et $g(y) = t : g(x), g(y) \in V$; posons $f = g|_V$, on a $f(V) \subset V$; f étant la restriction d'une application bijective donc injective, elle est également injective ; comme $g \in \text{Aut}(\Gamma)$, on peut donc appliquer le même procédé que ci-dessus : pour $f' = g^{-1}|_V$ on a $f'(V) \subset V$. Les composés $f \circ f'$ et $f' \circ f$ ont un sens et $f \circ f' = g|_V \circ g^{-1}|_V = \text{Id}_V$, $f' \circ f = g^{-1}|_V \circ g|_V = \text{Id}_V$. Donc f est bijective.

Pour tout arc $e = (x, y)$ on a vu qu'il existait un arc $a = (z, t)$ tel que $g(x) = z$ et $g(y) = t$; et que cette propriété a également lieu pour g^{-1} : ainsi f est un automorphisme de $\overrightarrow{\text{Cay}}(G, S)$ qui de plus, d'après ci-dessus, conserve les couleurs ; on a donc établi que

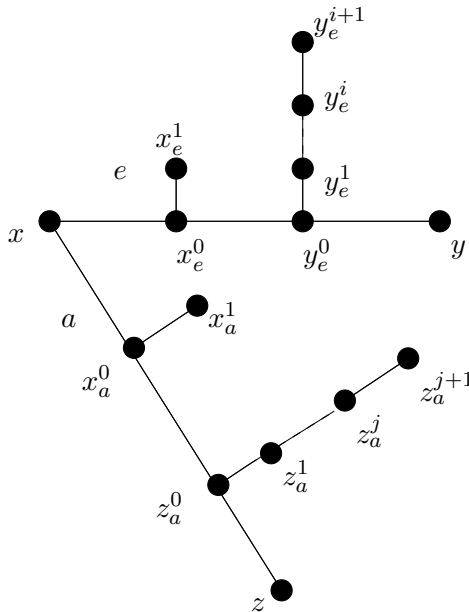


Figure 9.6 – Numérotation précise des nouveaux sommets produits par deux arcs $e = (x, y)$ et $a = (x, z)$ coloriés par s_i et s_j .

$f \in \text{Aut}_{\text{coul}}(\overrightarrow{\text{Cay}}(G, S))$ et que f se prolonge de façon unique à Γ :
 $\varphi(f) = g$. □

On vient de démontrer le théorème suivant.

Théorème 9.4.1 (FRUCHT, 1938). *Soit G un groupe fini ou dénombrable, alors il existe un graphe Γ tel que $\text{Aut}(\Gamma) \simeq G$.*

Exercice 9.11. Appliquer la méthode de construction aux graphes de la figure 9.4. Dans le cas du graphe A donner un plus petit graphe dont le groupe d'automorphismes est isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Exercice 9.12. Donner les digraphes de CAYLEY dans les cas suivants :

- 1) $G = \mathbb{Z}$, $S = \{1\}$: le graphe est tout simple !
- 2) $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $S = \{(1, 0), (0, 1)\} \subset G$.
- 3) $G = \mathbb{Q}$, $S = [0, 1[\cap \mathbb{Q} = \{s_1, s_2, \dots, s_n, \dots\}$.

On peut demander un peu plus dans la réponse à la question de KÖNIG : soit G un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$; G agit (voir § 9.5) sur $\{1, \dots, n\}$: existe-t-il un graphe Γ ayant $1, \dots, n$ pour sommets et tel que $\text{Aut}(\Gamma)$ agisse sur $\{1, \dots, n\}$ de la même façon ?

La réponse n'est pas toujours positive : elle l'est si $G = \mathfrak{S}_n$, car $\Gamma = K_n$ convient ; mais prenons le groupe cyclique (isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$) engendré par le 3-cycle (123) de $\mathfrak{S}_3$. La figure 9.7 montre le plus petit graphe ayant $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ pour groupe d'automorphismes. Or ce graphe a 9 sommets et 15 arêtes. Par conséquent il n'existe aucun graphe dont l'action du groupe d'automorphismes sur ses sommets soit équivalente à l'action de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sur lui-même.

D'ailleurs si $V(\Gamma) = \{1, 2, 3\}$ et si $(123) \in \text{Aut}(\Gamma)$, alors Γ est soit K_3 soit $\overline{K_3}$ et par suite $(13)(2) = (13) \in \text{Aut}(\Gamma)$ (automorphisme qui échange les sommets 1 et 3 et qui laisse invariant le sommet 2), donc $\text{Aut}(\Gamma)$ a un élément d'ordre 2 et ne peut être isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Remarque 9.4.2. La méthode utilisée pour établir le théorème 9.4.1 de FRUCHT donne un graphe à 18 sommets et 18 arêtes.

Néanmoins on peut donner le résultat suivant (voir [10]) :

Théorème 9.4.3 (BOUWER). *Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble X . Il existe un graphe Γ tel que $\text{Aut}(\Gamma) \simeq G$ et tel que :*

- $X \subset V(\Gamma)$.
- X est invariant par l'action de $\text{Aut}(\Gamma)$; pour tout $f \in \text{Aut}(\Gamma)$, $f(X) \subset X$.
- L'action de $\text{Aut}(\Gamma)$ sur X est équivalente à l'action de G sur X .

Exemple 9.4.4. Ainsi pour $G = \langle (1\ 2\ 3) \rangle \subset \mathfrak{S}_3$ agissant sur $X = \{1, 2, 3\}$, le graphe de la figure 9.7 a 9 sommets, X est invariant sous l'action de $\text{Aut}(\Gamma)$ (pourquoi?) et cette action est bien celle de G sur X .

9.5 Action de groupe

Un groupe G (noté multiplicativement, d'unité 1) **opère ou agit sur un ensemble** X s'il existe un morphisme de groupes

$$\begin{aligned}\varphi : G &\longrightarrow \mathfrak{S}_X \\ g &\longmapsto \varphi_g.\end{aligned}$$

Le morphisme φ est appelé morphisme d'**action de G sur X** et $\text{Ker}(\varphi)$ est le **noyau de l'action** de G sur X ; l'action est **fidèle** si $\text{Ker}(\varphi) = \{1\}$. On utilise la notation $\varphi_g(x) = g \cdot x$.

À cette action est associée une loi externe sur X :

$$\begin{aligned}G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x\end{aligned}$$

vérifiant :

- pour tous $g_1, g_2 \in G$ et pour tout $x \in X$: $g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x$;
- pour tout $x \in X$: $1 \cdot x = x$.

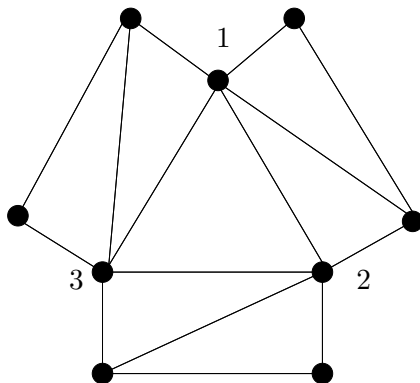


Figure 9.7 – Graphe de plus petit ordre ayant le groupe cyclique $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ comme groupe d'automorphismes.

Lorsque G agit sur X , on dit aussi que X est un **G -module** (par analogie avec la notion de module sur un anneau, mais avec la différence notoire qu'il n'y a pas de loi interne sur X et que X est seulement équipé d'une loi externe).

Par exemple soit H un sous-groupe de G , alors G est un H -module dont la loi externe est induite par la translation :

$$\begin{aligned} H \times G &\longrightarrow G \\ (h, x) &\longmapsto hx \end{aligned}$$

Exercice 9.13. Montrer que si X est un G -module, on peut lui associer une action de G sur X .

Si G_1 agit sur X_1 et G_2 agit sur X_2 , on dit que ces actions sont **équivalentes** s'il existe un isomorphisme $\alpha : G_1 \longrightarrow G_2$ et une bijection $\beta : X_1 \longrightarrow X_2$ vérifiant :

$$\beta(g \cdot x) = \alpha(g) \cdot \beta(x), \quad \forall x \in X_1, \forall g \in G_1.$$

Un exemple très important d'action de groupe est celui de l'action des **groupes de permutations** (voir § 9.1), c'est-à-dire l'action des sous-groupes G de $\mathfrak{S}_X$: cela veut dire qu'on s'intéresse à la manière dont G agit sur les lettres de X . Nous avons rencontré un autre exemple au début de ce chapitre : le groupes des automorphismes d'un graphe $\text{Aut}(\Gamma)$ agit sur l'ensemble $\mathcal{C}$ des composantes connexes de $V(\Gamma)$:

$$\begin{aligned} \text{Aut}(\Gamma) \times \mathcal{C} &\longrightarrow \mathcal{C} \\ (f, C) &\longmapsto f(C) \end{aligned}$$

Soit X un G -module : l'**orbite de x** , $x \in X$, sous l'action de G est

$$G \cdot x = \{g \cdot x, g \in G\},$$

et le **stabilisateur de x dans G** est

$$\text{Stab}_G(x) = \{g \in G : g \cdot x = x\}.$$

Les diverses orbites forment une partition de l'ensemble X (voir exercice 9.14 ci-dessous).

Exercice 9.14.

- i) Montrer que la relation « x appartient à la même orbite que y » est une relation d'équivalence : l'**équivalence de transitivité**.

- ii) Montrer que $\text{Stab}_G(x)$ est un sous-groupe de G .
- iii) Montrer que si $y = g \cdot x$, on a

$$\text{Stab}_G(y) = g \text{Stab}_G(x) g^{-1}.$$

Si l'on choisit un élément x_t dans chaque orbite $G \cdot x_t$, $t \in T$, on a :

$$X = \bigsqcup_{t \in T} G \cdot x_t.$$

Ainsi l'ensemble des orbites forment une partition de X . Dans l'exemple déjà évoqué et décrit au début de ce chapitre, les orbites sont les composantes connexes isomorphes d'un graphe et l'égalité ci-dessus se traduit par la relation (voir § 9.2.1) :

$$\mathcal{C} = \bigsqcup_{\alpha} \mathcal{C}_{\alpha}.$$

Une action est dite **transitive** s'il n'y a qu'une seule orbite

$$\forall x, y \in X \quad \exists g \in G : g \cdot x = y ;$$

on dit aussi que G **agit transitivement** sur X .

Soient X, Y deux G -modules ; un **G -morphisme** est une application $f : X \longrightarrow Y$ vérifiant

$$f(g \cdot x) = g \cdot f(x) \quad \forall g \in G, \forall x \in X ;$$

on note $\text{Hom}_G(X, Y)$ l'ensemble des G -morphisms de X dans Y et $\text{Isom}_G(X, Y)$ l'ensemble des G -isomorphismes, c'est-à-dire des G -morphisms f possédant un G -morphisme réciproque $f' : Y \longrightarrow X$ tel que $f' \circ f = \text{Id}_X$, $f \circ f' = \text{Id}_Y$; on vérifie très facilement que ceci équivaut au fait que f soit un G -morphisme bijectif.

Un autre exemple très important de G -module est le suivant : soit H un sous-groupe de G , l'ensemble $xH = \{xh, h \in H\}$ est la **classe à gauche de x modulo H** . De la même manière on définit $Hx = \{hx, h \in H\}$ **classe à droite de x modulo H** .

Exercice 9.15. Montrer que la relation « x et y sont dans la même classe à gauche (respectivement à droite) modulo H » est une relation d'équivalence. En déduire que si $Hx \neq Hy$ alors $Hx \cap Hy = \emptyset$.

On note G/H l'ensemble des classes à gauche xH et $\pi : G \mapsto G/H$ la surjection canonique $x \mapsto xH$; l'ensemble G/H n'est pas toujours un groupe (il faut pour cela que H soit un sous-groupe distingué de G c'est-à-dire que pour tout $x \in G$, $x^{-1}Hx = H$), mais c'est toujours un G -module pour l'action naturelle :

$$\begin{aligned} G \times G/H &\longrightarrow G/H \\ (g, xH) &\longmapsto gxH \end{aligned}$$

On se souvient facilement de ces conventions en notant que G agit à **gauche** sur les **classes à gauche** modulo H .

Il est clair que $\pi \in \text{Hom}_G(G, G/H)$, où $\text{Hom}_G(G_1, G_2)$ est l'ensemble des morphismes de G -modules de G_1 dans G_2 .

Soit X un G -module et $x \in X$; alors l'orbite de x , $G \cdot x$, est un G -module (pour l'action naturelle à gauche $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$) et

$$\begin{aligned} f : G &\longrightarrow G \cdot x \\ g &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

est un G -morphisme ; on a donc un diagramme de G -modules :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & G/\text{Stab}_G(x) \\ & \searrow \pi & \downarrow \tilde{f} \\ & & G \cdot x \end{array}$$

Il existe un unique $\tilde{f} \in \text{Hom}_G(G/\text{Stab}_G(x), G \cdot x)$ tel que $\tilde{f} \circ \pi = f$:

notons pour simplifier $H = \text{Stab}_G(x)$; l'unicité du morphisme est claire ;

existence : on pose $\tilde{f}(\pi(g)) = f(g) = g \cdot x$;

– $\tilde{f}$ est bien définie car si $\pi(g) = \pi(g')$, alors $gH = g'H$, d'où $g^{-1}g' \in H$: $(g^{-1}g') \cdot x = x$; $g' \cdot x = g \cdot x$, c'est-à-dire $f(g') = f(g)$;

– $\tilde{f}$ est un G -morphisme : $\tilde{f}(h \cdot \pi(g)) = \tilde{f}(h \cdot gH) = f(hg) = h \cdot f(g) = h\tilde{f}(gH)$;

– $\tilde{f}$ est un G -isomorphisme, car en posant $\theta : G \cdot x \longrightarrow G/H$, $\theta(g \cdot x) = gH$, on constate facilement que $\theta \in \text{Hom}_G(G \cdot x, G/H)$ et que θ est l'inverse de $\tilde{f}$.

On vient de démontrer le célèbre théorème suivant.

Théorème 9.5.1 (théorème orbite-stabilisateur).

Il existe un G -isomorphisme entre $G \cdot x$ et l'ensemble $G/\text{Stab}_G(x)$.

En particulier lorsque l'action est transitive, $(X = G \cdot x)$ et X fini, on voit que $|X| = |G/\text{Stab}_G(x)|$ divise l'ordre de G ; c'est ainsi qu'un groupe de permutations transitif agissant sur $\{1, 2, \dots, n\}$ a un ordre qui est un multiple de n .

9.6 Graphes transitifs

Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe : $\text{Aut}(\Gamma) \subset \mathfrak{S}_V$. On dit que Γ est **sommet-transitif** si pour toute paire de sommets x, y , il existe $f \in \text{Aut}(\Gamma)$ tel que $f(x) = y$. En d'autres termes un graphe est sommet-transitif si son groupe d'automorphismes agit transitivement sur ses sommets. Nous avons vu aussi que $\text{Aut}(\Gamma)$ peut être considéré comme sous-groupe de $\mathfrak{S}_E$ (à condition que $|E| \geq 2$, voir théorème 9.2.3). On dit que Γ est **arête-transitif** si pour toute paire d'arêtes $a = \{x, y\}$, $b = \{z, t\}$ il existe $f \in \text{Aut}(\Gamma)$ tel que $\{f(x), f(y)\} = \{z, t\}$, c'est-à-dire tel que $\alpha_\Gamma(f)(a) = b$. En d'autres termes un graphe est arête-transitif si son groupe d'automorphismes agit transitivement sur ses arêtes.

Attention : un graphe peut être sommet-transitif sans être arête-transitif et il peut être arête-transitif sans être sommet-transitif. La figure 9.8 donne des exemples de tels graphes.

Exemple 9.6.1. Le graphe A de la figure 9.8 est sommet-transitif mais non arête-transitif car sinon on pourrait envoyer par un automorphisme l'arête a sur l'arête b . Or le plus petit cycle qui contient a est de longueur 3 et le plus petit cycle qui contient b est de longueur 4. Le graphe B de la figure 9.8 est arête-transitif mais non sommet-transitif car on ne peut pas envoyer par un automorphisme un sommet de degré 1 sur un sommet de degré 2.

Dans un graphe sommet-transitif tous les sommets jouent en quelque sorte le même rôle : un tel graphe est donc nécessairement régulier.

Dans un graphe arête-transitif, ce sont les arêtes qui ont un rôle identique. Un graphe est dit **symétrique** s'il est à la fois arête-transitif et sommet-transitif.

Exercice 9.16. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le graphe $K_{m,n}$ soit symétrique.

Le théorème suivant fournit une description des graphes arête-transitifs qui pourraient ne pas être symétriques.

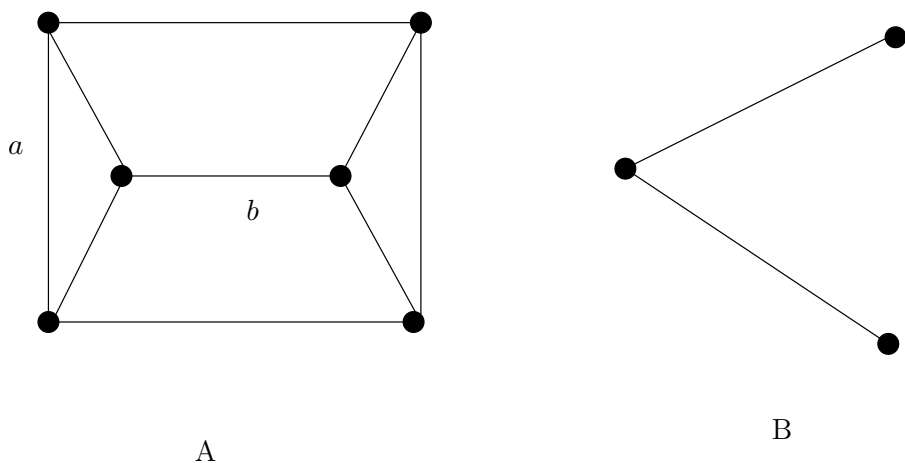


Figure 9.8 – Sommet-transitivité et arête-transitivité.

Théorème 9.6.2. Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe arête-transitif sans sommet isolé. Si Γ n'est pas sommet-transitif alors l'action de $\text{Aut}(\Gamma)$ sur V a exactement deux orbites et ces deux orbites forment une bipartition de V et $\Gamma = (V; E)$ est biparti.

Démonstration. D'abord remarquons qu'un graphe arête-transitif sans sommet isolé qui n'est pas sommet-transitif admet au moins 3 sommets. Soit $\{x, y\}$ une arête de Γ ; posons $G = \text{Aut}(\Gamma)$ et considérons les deux orbites $V_1 = G \cdot x$, $V_2 = G \cdot y$.

Montrons que $V = V_1 \sqcup V_2$: soit $z \neq x, y$; z n'étant pas isolé, il existe une arête $e = \{z, w\} \in E$; par transitivité il existe un automorphisme $\sigma \in G$ tel que $\sigma(\{x, y\}) = \{z, w\}$, donc $\sigma(x) = z$ ou $\sigma(y) = z$, et z est dans l'orbite de x ou de y .

Notons que $V_1 \neq V_2$ (sinon Γ serait sommet-transitif); reste à voir que les éléments de V_1 (respectivement V_2) ne sont pas adjacents : s'il existait $u, v \in V_1$ tels que $\{u, v\} \in E$, il existerait $\sigma \in G$ tel que $\sigma(\{x, y\}) = \{u, v\}$, donc $\sigma(x) = u$ et $\sigma(y) = v$ (ou l'inverse) et on aurait $v \in G \cdot y = V_2$, donc $v \in V_1 \cap V_2$, ce qui n'est pas possible car deux orbites différentes sont disjointes. $\square$

Remarque 9.6.3. Lorsque Γ est sommet-transitif, il résulte du commentaire suivant le théorème orbite-stabilisateur 9.5.1 que $|V|$ divise $|\text{Aut}(\Gamma)|$; si Γ (connexe) est arête-transitif et n'est aucun des graphes $K_2, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ du corollaire 9.2.6 du théorème de WHITNEY (voir § 9.2.3),

on obtient que $|E|$ divise $|\text{Aut}(\Gamma)|$. Cela est illustré par le graphe A de la figure 9.8 qui possède 9 arêtes mais son groupe d'automorphismes est de cardinal 12. Donc A n'est pas arête-transitif, comme déjà observé.

Exercice 9.17. Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe régulier de degré impair alors le nombre de sommets est pair. De plus si Γ est sommet-transitif alors le cardinal de $\text{Aut}(\Gamma)$ est pair.

Soit $\vec{\Gamma} = (V; \vec{E})$ un digraphe simple; on dit que $\vec{\Gamma}$ est **arc-transitif** si pour toute paire d'arcs (x, y) et (z, w) , il existe $f \in \text{Aut}(\vec{\Gamma})$ tel que $f((x, y)) = (z, w)$, c'est-à-dire tel que $f(x) = z$ et $f(y) = w$. Notons $\Gamma^+(x) = \{y \in V, (x, y) \in \vec{E}\}$.

Proposition 9.6.4. Soient $\vec{\Gamma} = (V; \vec{E})$ un digraphe simple dont le graphe sous-jacent est connexe; soit G un sous-groupe de $\text{Aut}(\vec{\Gamma})$ agissant transitivement sur les sommets. Alors G agit transitivement sur les arcs si et seulement si pour tout $x \in V$, $\text{Stab}_G(x)$ agit transitivement sur les sommets du sous-graphe induit $\Gamma^+(x)$.

Démonstration. Supposons que G agisse transitivement sur les arcs et soient $u, v \in \Gamma^+(x)$; alors $(x, u), (x, v) \in \vec{E}$; il existe $f \in G$ tel que $f((x, u)) = (x, v)$, donc $f(x) = x$, $f(u) = v$ et $f \in \text{Stab}_G(x)$; on en déduit que $\text{Stab}_G(x)$ agit transitivement sur les sommets du sous-graphe induit $\Gamma^+(x)$.

Rappelons que $x \notin \Gamma(x)$.

Supposons maintenant que pour tout x , $\text{Stab}_G(x)$ agisse transitivement sur les sommets du sous-graphe induit $\Gamma^+(x)$. Soient deux arcs $(y, u), (z, v) \in \vec{E}$. Comme G agit transitivement sur V , il existe $f, g \in G$ tels que $f(y) = x$ et $g(z) = x$; donc $f((y, u)) = (x, f(u)) \in \vec{E}$ et $g((z, v)) = (x, g(v)) \in \vec{E}$. Ainsi $f(u), g(v) \in \Gamma^+(x)$.

De plus, $\text{Stab}_G(x)$ agissant transitivement sur les sommets du sous-graphe induit $\Gamma^+(x)$, il existe $h \in \text{Stab}_G(x)$ tel que $h(f(u)) = g(v)$. On a donc $g^{-1}(h(f(y, u))) = g^{-1}(h(x, f(u))) = g^{-1}(x, g(v)) = (z, v)$. D'où G agit transitivement sur les arcs de Γ . $\square$

9.7 Théorie spectrale des graphes

Nous allons d'abord faire quelques compléments d'algèbre linéaire (pour les notions de base en algèbre voir § 6.5). Ceux-ci seront appliqués à la théorie des graphes.

9.7.1 L'espace hermitien $\mathbb{C}^n$

Rappelons que $\mathbb{C}^n$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension n , avec la base canonique $\mathfrak{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$, où $e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (le 1 se situe en i -ième position). $\mathbb{C}^n$ est muni du **produit scalaire canonique**, pour $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i \bar{y}_i.$$

($z \mapsto \bar{z}$ est la conjugaison complexe). Ce produit scalaire est linéaire par rapport à la première variable, antilinéaire par rapport à la seconde variable : pour $x, x', y, y' \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$- \langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$$

$$- \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

$$- \langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle$$

$$- \langle x, \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle,$$

et vérifie la « symétrie hermitienne »

$$- \overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle.$$

On dit que x est **orthogonal** à y si $\langle x, y \rangle = 0$. Plus généralement si $X, Y \subset \mathbb{C}^n$, on dit que X est orthogonal à Y si $\langle x, y \rangle = 0$ pour tous $x \in X$, $y \in Y$.

Le produit scalaire est **non dégénéré** : si $\langle x, y \rangle = 0$ pour tout y , alors $x = 0_{\mathbb{C}^n}$.

À ce produit scalaire est associée la **norme hermitienne de $\mathbb{C}^n$** :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}. \text{ On a en particulier } \|x\| = 0 \implies x = 0_{\mathbb{C}^n}.$$

La base canonique $\mathfrak{B}$ est **orthonormale** :

$$\langle e_i, e_j \rangle = 0, \langle e_i, e_i \rangle = 1, 1 \leq i \neq j \leq n.$$

On notera aussi que si $x = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i a_i$ dans une base orthonormale $\{a_i, i = 1, \dots, n\}$, alors $x_j = \langle x, a_j \rangle$ car

$$\langle x, a_j \rangle = \left\langle \sum_{1 \leq i \leq n} x_i a_i, a_j \right\rangle = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i \langle a_i, a_j \rangle = x_j.$$

Concernant les matrices, rappelons (voir chapitre 6) que $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices $m \times n$ à coefficients complexes. Notamment $(a_1 \dots a_n) \in \mathcal{M}_{1 \times n}(\mathbb{C})$ désigne une **matrice-ligne**.

Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$, la matrice **transposée** de A est ${}^t A = (a'_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C})$ définie par $a'_{ij} = a_{ji}$ pour tous $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. La transposée de la matrice ligne $(a_1 \dots a_n)$ est la **matrice-colonne** ${}^t(a_1 \dots a_n) \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{C})$.

Lorsqu'on représente le vecteur x par la matrice colonne ${}^t(x_1 \dots x_n)$ dans une base orthonormale, le produit scalaire $\langle x, y \rangle$ est représenté par le produit matriciel

$$(x_1 \dots x_n) {}^t(\overline{y_1 \dots y_n}) = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i \overline{y_i}.$$

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$; le **polynôme caractéristique** de u est $\Phi(u, x) = \det(xI_n - A)$ où A est la matrice de u dans une base quelconque de $\mathbb{C}^n$ et I_n désigne la matrice identité de $\mathbb{C}^n$; on montre en effet que ce déterminant ne dépend pas de la base dans laquelle on représente u ; c'est un polynôme de degré n ; il a donc, d'après le théorème de d'ALEMBERT, n racines dans $\mathbb{C}$ (en comptant leurs multiplicités) : ce sont les valeurs propres de u : λ est **valeur propre** de u s'il existe $x \neq 0_{\mathbb{C}^n}$ tel que $u(x) = \lambda x$; un tel vecteur $x \in \mathbb{C}^n$ est appelé **vecteur propre** associé à la valeur propre λ ; l'**espace propre** associé à λ est $E_\lambda = \{z \in \mathbb{C}^n : u(z) = \lambda z\}$; s'il y a p valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_p$, alors $n = \sum_{1 \leq i \leq p} m_i$. L'ensemble des valeurs propres est souvent appelé **spectre** de u , noté $\text{Sp}(u)$.

L'**adjoint** de l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ est l'endomorphisme u^* défini par :

$$\forall x, y \in \mathbb{C}^n, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle ;$$

il est clair que $(u^*)^* = u$.

u est un endomorphisme **hermitien** si $u^* = u$; on notera $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ l'ensemble des endomorphismes hermitiens de $\mathbb{C}^n$.

Lorsqu'on fixe une base orthonormale $\mathfrak{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ de $\mathbb{C}^n$ et qu'on représente u par la matrice $A = (a_{ij})$ dans cette base, alors u^* est représenté par $A^* = (\overline{a_{ji}})$, appelée matrice **adjointe** ou **transconjuguée** de A : $A^* = {}^t\overline{A}$; en effet puisque $u(b_j) = \sum_{1 \leq i \leq n} a_{ij} b_i$, on a

$$\langle u(b_j), b_k \rangle = \left\langle \sum_{1 \leq i \leq n} a_{ij} b_i, b_k \right\rangle = \sum_{1 \leq i \leq n} a_{ij} \langle b_i, b_k \rangle = a_{kj} ;$$

de même en écrivant $u^*(b_j) = \sum_{1 \leq i \leq n} a_{ij}^* b_i$, on obtient

$$\langle u^*(b_j), b_k \rangle = \left\langle \sum_{1 \leq i \leq n} a_{ij}^* b_i, b_k \right\rangle = \sum_{1 \leq i \leq n} a_{ij}^* \langle b_i, b_k \rangle = a_{kj}^* ;$$

donc

$$\overline{a_{j,k}^*} = \overline{\langle u^*(b_j), b_k \rangle} = \langle b_k, u^*(b_j) \rangle = \langle u(b_k), b_j \rangle = a_{j,k}.$$

Ainsi $\overline{A^*} = {}^tA$, soit encore $A^* = {}^t\overline{A}$.

Il en résulte que si u est hermitien, il est représenté dans une base orthonormale par une **matrice hermitienne** : $A = {}^t\overline{A} = A^*$.

Réciproquement, si A est une matrice hermitienne (c'est-à-dire si $A = A^*$) et si on se donne une base orthonormale $\mathfrak{B}$, A peut être vue comme la matrice dans cette base d'un endomorphisme hermitien u : pour $x = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i b_i$, on pose $u(x) = A^t(x_1 \dots x_n)$; d'où

$$\langle x, u(y) \rangle = \langle x, A^t y \rangle = \langle x, A^{*t} y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle,$$

mais alors $u = u^*$ et u est un endomorphisme hermitien.

Remarque 9.7.1. Toute matrice A symétrique à coefficients réels est hermitienne : $A = {}^tA = \overline{{}^tA} = A^*$.

Les endomorphismes hermitiens ont les propriétés remarquables suivantes.

Théorème 9.7.2. Soit $u \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ un endomorphisme hermitien de $\mathbb{C}^n$:

- i) les valeurs propres λ , $\lambda \in \text{Sp}(u)$, de u sont réelles ;
- ii) les espaces propres E_λ , $\lambda \in \text{Sp}(u)$, sont orthogonaux deux à deux ;
- iii) u est diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une base de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres de u .

Démonstration.

i) Si $u(x) = \lambda x$, $x \neq 0_{\mathbb{C}^n}$, on a $\langle u(x), x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle$; d'autre part $\langle u(x), x \rangle = \langle x, u^*(x) \rangle = \langle x, u(x) \rangle = \langle x, \lambda x \rangle = \overline{\lambda} \langle x, x \rangle$; comme $x \neq 0_{\mathbb{C}^n}$, on a $\langle x, x \rangle \neq 0$, donc $\lambda = \overline{\lambda}$, c'est-à-dire $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii) Soient $\lambda \neq \mu$ deux valeurs propres de u ; supposons $\mu \neq 0$ et soient $x \in E_\lambda$ et $y \in E_\mu$; on a $\langle u(x), u(y) \rangle = \lambda \overline{\mu} \langle x, y \rangle = \lambda \mu \langle x, y \rangle$ par i); mais aussi $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle u(x), \mu y \rangle = \langle x, u^*(\mu y) \rangle = \langle x, u(\mu y) \rangle = \langle x, \mu^2 y \rangle = \mu^2 \langle x, y \rangle$; d'où $\mu(\lambda - \mu) \langle x, y \rangle = 0$ et finalement $\langle x, y \rangle = 0$ car $\lambda \neq \mu \neq 0$.

iii) Voir exercice 9.18 ci-dessous. $\square$

Exercice 9.18. Démontrer que si $u \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ est un endomorphisme hermitien de $\mathbb{C}^n$, il existe une base de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres orthonormés de u , c'est-à-dire :

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda.$$

Indication : raisonner par récurrence sur n ; pour passer de n à $n + 1$, remarquer que le polynôme caractéristique $\Phi(u, x)$ a au moins une racine

λ , puis montrer que l'orthogonal de E_λ est stable par u , soit encore que $u(E_\lambda) \subset E_\lambda$.

Il est commode d'associer à un endomorphisme hermitien u son quotient de RAYLEIGH :

$$0_{\mathbb{C}^n} \neq x \mapsto R(u, x) = \frac{\langle u(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} \in \mathbb{R}.$$

$R(u, x)$ est bien un nombre réel puisque $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$ et $\langle u(x), x \rangle = \langle x, u(x) \rangle = \overline{\langle u(x), x \rangle}$; ce quotient a la propriété suivante.

Proposition 9.7.3. *Soient $\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$ la plus petite et la plus grande valeur propre de u , alors*

$$\forall x \neq 0_{\mathbb{C}^n} \quad : \quad \lambda_{\min} \leq R(u, x) \leq \lambda_{\max}.$$

Démonstration. Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base constituée de vecteurs propres de u , associés aux valeurs propres $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$, qu'on peut supposer orthonormale (il suffit de choisir une base orthonormale dans chaque sous-espace propre); pour $x \in \mathbb{C}^n$, on a $x = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i e_i$, d'où

$$\begin{aligned} \langle u(x), x \rangle &= \left\langle \sum_{1 \leq i \leq n} x_i u(e_i), \sum_{1 \leq i \leq n} x_i e_i \right\rangle = \left\langle \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i x_i e_i, \sum_{1 \leq i \leq n} x_i e_i \right\rangle \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i x_i \overline{x_i}; \end{aligned}$$

en remarquant que $\lambda_{\min} \leq \lambda_i \leq \lambda_{\max}$ pour tout i , on a :

$$\frac{\sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i x_i \overline{x_i}}{\sum_{1 \leq i \leq n} x_i \overline{x_i}} \leq \frac{\sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_{\max} x_i \overline{x_i}}{\sum_{1 \leq i \leq n} x_i \overline{x_i}} = \frac{\lambda_{\max} \sum_{1 \leq i \leq n} x_i \overline{x_i}}{\sum_{1 \leq i \leq n} x_i \overline{x_i}} = \lambda_{\max}.$$

On raisonne de la même manière pour $\lambda_{\min}$. □

On pourra noter que les valeurs $\lambda_{\min}$ et $\lambda_{\max}$ sont atteintes en prenant des vecteurs propres associés.

9.7.2 Spectre d'un graphe

La théorie spectrale des graphes est l'étude de certains invariants ou caractères attachés aux graphes : nombre de stabilité (c'est-à-dire cardinal maximum des indépendants), diamètre, connectivité... par l'intermédiaire du polynôme caractéristique, des valeurs et vecteurs propres de la matrice d'adjacence et de la matrice laplacienne.

Nous étudions ici plus en détails la matrice d'adjacence A d'un graphe $\Gamma = (V; E)$, dont la définition a été introduite au chapitre 1 et développée au chapitre 6 : on y a utilisé notamment une bijection entre $V = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ et la base canonique de $\mathbb{F}_2^n$, qui ainsi devenait l'espace des sommets de $\Gamma : C_0(\Gamma)$. Afin d'exploiter les propriétés des matrices hermitiennes, nous prendrons ici $\mathbb{C}$ pour corps de base et nous interpréterons V comme une base orthonormale de $\mathbb{C}^V \simeq \mathbb{C}^n$, $n = |V|$, ($\mathbb{C}^V$ désigne l'espace des fonctions définies sur V et à valeur dans $\mathbb{C}$) sans expliciter une bijection entre V et la base orthonormale $\mathfrak{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$: nous identifions simplement $V = \mathfrak{B}$; cet *abus de langage* nous évite l'indexation des sommets, qui s'avérerait lourde dans certains calculs ; en conséquence la matrice d'adjacence $A = (a_{ij})$ d'un graphe est interprétée comme un « tableau » de valeurs $A = (a_{vw})_{v,w \in V}$ sans tenir compte de l'ordonnancement des lignes et des colonnes, comme c'est le cas dans une matrice.

Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe simple : V est donc considéré comme une base orthonormale de $\mathbb{C}^n$, où $n = |V|$; $A = (a_{vw})_{v,w \in V}$ désigne sa matrice d'adjacence :

- $a_{vw} = 1$, si $\{v, w\} \in E$;
- $a_{vw} = 0$ sinon.

Comme A est réelle et symétrique, c'est une matrice hermitienne (voir remarque 9.7.1) ; elle représente donc, dans la base orthonormale $\mathfrak{B} = V$ de $\mathbb{C}^V \simeq \mathbb{C}^n$, $n = |V|$, un endomorphisme hermitien $\mathfrak{A} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$; le **polynôme caractéristique** de Γ est le polynôme caractéristique de l'endomorphisme $\mathfrak{A}$; on le note $\Phi(\Gamma, x) = \det(x \text{Id} - \mathfrak{A})$: c'est un polynôme unitaire de degré n dont les coefficients sont dans $\mathbb{Z}$. De même les **valeurs propres** du graphe Γ sont par définition les valeurs propres de $\mathfrak{A}$: ce sont donc les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme caractéristique $\Phi(\Gamma, x) \in \mathbb{Z}[x]$. Le **spectre** du graphe $\Gamma = (V; E)$, noté $\text{Sp}(\Gamma)$, est la liste des valeurs propres du graphe renseignées de leur ordre de multiplicité.

Exercice 9.19. Montrer que si $z \in \mathbb{Q}$ est racine de $\Phi(\Gamma, x)$, alors en fait $z \in \mathbb{Z}$.

Indication : prendre z sous la forme $\frac{p}{q}$ avec $\text{pgcd}(p, q) = 1$ et écrire que z est racine du polynôme $\Phi(\Gamma, x)$, puis « chasser » les dénominateurs.

Rappelons les relations entre $\mathfrak{A}$ et sa matrice A dans la base $\mathfrak{B} = V$: soit $f = \sum_{x \in V} f_x x \in \mathbb{C}^V$, $f_x \in \mathbb{C}$; on a $\mathfrak{A}(f) = \sum_{x \in V} f_x \mathfrak{A}(x)$ et $\mathfrak{A}(x) = \sum_{w \in V} a_{wx} w$ (la colonne de A correspondant au sommet x est constituée

des composantes de $\mathfrak{A}(x)$ dans la base V), d'où les formules suivantes :

$$\mathfrak{A}(x) = \sum_{w \in V} a_{wx} w = \sum_{w \in V : \{x, w\} \in E} w, \quad (9.2)$$

$$\mathfrak{A}(f) = \sum_{x \in V} f_x \mathfrak{A}(x) = \sum_{x, w \in V} f_x a_{wx} w = \sum_{x \in V} f_x \sum_{w \in V : \{x, w\} \in E} w ; \quad (9.3)$$

la composante de $\mathfrak{A}(f)$ correspondant au sommet x est

$$\mathfrak{A}(f)_x = \sum_{w \in V} a_{wx} f_w = \sum_{w \in V : \{x, w\} \in E} f_w. \quad (9.4)$$

De plus :

$$\forall x, y \in V \quad \langle \mathfrak{A}(y), x \rangle = \left\langle \sum_{w \in V} a_{wy} w, x \right\rangle = \sum_{w \in V} a_{wy} \langle w, x \rangle = a_{xy},$$

car $\langle w, x \rangle = 1$ quand $w = x$ et 0 sinon ; en particulier on a toujours $\langle \mathfrak{A}(x), x \rangle = 0$ car le graphe est supposé sans boucle.

Proposition 9.7.4. *Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe avec $E \neq \emptyset$, alors :*

- i) $\lambda_{\min}(\Gamma) \leq -1 < 1 \leq \lambda_{\max}(\Gamma)$;
- ii) $\delta(\Gamma) \leq \lambda_{\max}(\Gamma) \leq \Delta(\Gamma)$;
- iii) si Γ' est un sous-graphe induit de Γ alors

$$\lambda_{\min}(\Gamma) \leq \lambda_{\min}(\Gamma') \leq \lambda_{\max}(\Gamma') \leq \lambda_{\max}(\Gamma) ;$$

- iv) si Γ est régulier alors $\lambda_{\max} = \Delta(\Gamma)$; dans ce cas, si Γ est supposé de plus connexe, $\lambda_{\max}$ a un ordre de multiplicité égal à 1.

Démonstration.

i) Si $\{x, y\}$ est une arête,

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{A}(x + y), x + y \rangle &= \langle \mathfrak{A}(x), y \rangle + \langle \mathfrak{A}(y), x \rangle = 2, \\ \langle x + y, x + y \rangle &= \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle = 2, \end{aligned}$$

donc, d'après la proposition 9.7.3, $0 < 1 = R(\mathfrak{A}, x + y) \leq \lambda_{\max}$.

De même $\langle \mathfrak{A}(x - y), x - y \rangle = -2$ et $\langle x - y, x - y \rangle = 2$ donc $\lambda_{\min} \leq R(\mathfrak{A}, x - y) = -1 < 0$.

ii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de $\mathfrak{A}$ et $f = \sum_{x \in V} f_x x$ ($f_x \in \mathbb{C}$), un vecteur propre associé à λ : $\mathfrak{A}(f) = \lambda f$; soit $w \in V$ tel que $|f_w| =$

$\max\{|f_x|, x \in V\}$; puisque $f \neq 0_{\mathbb{C}^n}$, $f_w \neq 0$ est la plus grande coordonnée en module de f . La composante de $\mathfrak{A}(f)$ correspondant au sommet w est, d'après l'équation (9.4), $\mathfrak{A}(f)_w = \sum_{y \in V} a_{wy} f_y = \lambda f_w$; d'où

$$\begin{aligned} |\lambda f_w| &= \left| \sum_{y \in V} a_{wy} f_y \right| \leq \sum_{y \in V} |a_{wy}| |f_y| = \sum_{y \in V : \{w, y\} \in E} |f_y| \\ &\leq |f_w| \sum_{y \in V : \{w, y\} \in E} 1 = |f_w| d(w) \leq |f_w| \Delta(\Gamma), \end{aligned}$$

donc en simplifiant par $f_w : |\lambda| \leq \Delta$.

Notons $\mathbf{1}$ le vecteur $\sum_{x \in V} x$. On peut remarquer que $\mathbf{1}$ n'est autre que le vecteur $(1, 1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{C}^n$ dans la mesure où V est interprété comme la base canonique orthonormale de $\mathbb{C}^n$.

On a : $\mathfrak{A}(\mathbf{1}) = \mathfrak{A}(\sum_{x \in V} x) = \sum_{w, x \in V} a_{wx} w$ d'après (9.2), donc

$$\langle \mathfrak{A}(\mathbf{1}), \mathbf{1} \rangle = \left\langle \sum_{w, x \in V} a_{wx} w, \mathbf{1} \right\rangle = \sum_{w, x \in V} a_{wx} \langle w, \mathbf{1} \rangle = \sum_{w, x \in V} a_{wx}$$

et

$$\langle \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle = \left\langle \sum_{x \in V} x, \sum_{x \in V} x \right\rangle = \sum_{x \in V} \langle x, x \rangle = |V| = n;$$

ainsi d'après la proposition 9.7.3 :

$$\begin{aligned} \lambda_{\max} &\geq R(\mathfrak{A}, \mathbf{1}) = \frac{\langle \mathfrak{A}(\mathbf{1}), \mathbf{1} \rangle}{\langle \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle} = \frac{1}{n} \sum_{x \in V} \left(\sum_{w \in V} a_{wx} \right) = \frac{1}{n} \sum_{x \in V} d(x) \\ &\geq \frac{1}{n} \sum_{x \in V} \delta(\Gamma) = \delta(\Gamma). \end{aligned}$$

iii) Soit Γ' le sous-graphe induit sur $V' \subset V$ et soit A' sa matrice d'adjacence; A' est réelle et symétrique donc hermitienne (voir remarque 9.7.1), elle correspond donc à un endomorphisme hermitien $\mathfrak{A}'$ de $\mathbb{C}^{V'}$; notons $f = \sum_{x \in V'} f_x x$ un vecteur propre de norme 1 écrit dans la base orthonormale V' : $\langle f, f \rangle = 1$ associé à la valeur propre $\lambda_{\max}(\Gamma')$; on pose $g = \sum_{x \in V} g_x x$ où $g_x = f_x$ si $x \in V'$ et $g_x = 0$ si $x \in V \setminus V'$; on a $\langle g, g \rangle = 1$ dans $\mathbb{C}^V$ et $\langle \mathfrak{A}(g), g \rangle = \langle \mathfrak{A}'(f), f \rangle$; d'après la proposition 9.7.3 on a : $\lambda_{\max}(\Gamma') = R(\mathfrak{A}', f) = \frac{\langle \mathfrak{A}(g), g \rangle}{\langle g, g \rangle} = R(\mathfrak{A}, g) \leq \lambda_{\max}(\Gamma)$. L'autre inégalité se démontre de la même manière : avec des notations évidentes cela donne $\lambda_{\min}(\Gamma') = R(\mathfrak{A}', f) = R(\mathfrak{A}, g) \geq \lambda_{\min}(\Gamma)$.

iv) Γ est régulier de degré k si et seulement si pour tout sommet $x \in V$ on a : $\sum_{y \in V} a_{xy} = k$ et dans ce cas

$$\mathfrak{A}(\mathbf{1}) = \sum_{w, x \in V} a_{wx} w = \sum_{w \in V} \left(\sum_{x \in V} a_{wx} \right) w = \sum_{w \in V} kw = k\mathbf{1};$$

cela montre que k est valeur propre du graphe et, comme $k = \Delta(\Gamma)$, il résulte de i) que $\lambda_{\max}(\Gamma) = \Delta(\Gamma)$.

Soit $f = \sum_{x \in V} f_x x$ un autre vecteur propre associé à la valeur propre k : pour tout x on a : $\mathfrak{A}(f)_x = \sum_{w \in V} a_{wx} f_w = \lambda f_x$;

soit $t \in V$ tel que $|f_t| = \max\{|f_x|, x \in V\}$: alors $k f_t = \mathfrak{A}(f)_t = \sum_{x \in V} a_{tx} f_x = \sum_{x \in V: \{t, x\} \in E} f_x$, d'où

$$|k f_t| = \left| \sum_{x \in V: \{t, x\} \in E} f_x \right| \leq \sum_{\{t, x\} \in E} |f_x| \leq k |f_t|,$$

soit :

$$|k f_t| = \left| \sum_{x \in V: \{t, x\} \in E} f_x \right| = \sum_{x \in V: \{t, x\} \in E} |f_x| = k |f_t|.$$

Le graphe étant régulier de degré k , la somme a k termes, donc ceux-ci sont nécessairement égaux : $\forall x \quad |f_x| = |f_t|$; par le lemme 9.7.5 ci-dessous, il en résulte aussi que f_x et f_t ont même argument, donc $f_x = f_t$, pour tout voisin x de t .

Si le graphe est connexe, deux sommets quelconques sont reliés par une chaîne dont les sommets intermédiaires sont voisins du précédent et du suivant sur la chaîne : par transitivité on en déduit que tous les $f_x, x \in V$, ont une valeur commune f_0 . Finalement $f = \sum_{x \in V} f_x x = f_0 \sum_{x \in V} x = f_0 \mathbf{1}$: l'espace propre associé à k est donc de dimension 1. $\square$

Lemme 9.7.5. Si $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$ vérifient

$$\left| \sum_{1 \leq i \leq k} a_i \right| = \sum_{1 \leq i \leq k} |a_i|$$

alors les nombres complexes $a_i, i = 1, \dots, k$, ont le même argument.

Le cas $k = 2$ correspond au cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire pour le module dans $\mathbb{C}$, le résultat souhaité est alors bien connu. Le cas général s'obtient par une récurrence immédiate sur k .

Exercice 9.20. Montrer que $\chi(\Gamma) \leq \lambda_{\max}(\Gamma) + 1$.

Indication : utiliser la proposition 7.1.7.

Les graphes bipartis réguliers ont des propriétés spectrales simples qui permettent de les caractériser.

Théorème 9.7.6. *Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe connexe k -régulier. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- i) Γ est biparti ;
- ii) $\text{Sp}(\Gamma)$ est symétrique par rapport à 0 ;
- iii) $\lambda_{\min} = -k$.

Démonstration.

i) $\implies$ ii) : supposons que le graphe soit biparti : $V = V_1 \sqcup V_2$. Soit $\lambda \in \text{Sp}(\Gamma)$ et $f = \sum_{x \in V} f_x x$ un vecteur propre, associée à λ , de l'endomorphisme hermitien $\mathfrak{A}$ associé à la matrice d'adjacence A de Γ : alors $\mathfrak{A}(f) = \lambda f = \mathfrak{A}(\sum_{x \in V} f_x x) = \sum_{x, y \in V} f_x a_{yx} y = \sum_{y \in V} (\sum_{x \in V} f_x a_{yx}) y$, donc pour tout $y \in V$, on a $\sum_{x \in V} f_x a_{yx} = \sum_{x \in V : \{x, y\} \in E} f_x = \mathfrak{A}(f)_y = \lambda f_y$, d'après (9.4).

Considérons le vecteur non nul

$$g = \sum_{y \in V_1} f_y y - \sum_{y \in V_2} f_y y = \sum_{y \in V} g_y y.$$

On a $\mathfrak{A}(g) = \mathfrak{A}(\sum_{y \in V} g_y y) = \sum_{x, y \in V} g_y a_{xy} x = \sum_{x \in V} (\sum_{y \in V} g_y a_{xy}) x$: $\mathfrak{A}(g) = \sum_{x \in V} e_x x$ avec pour tout $x \in V$,

$$e_x = \sum_{y \in V} g_y a_{xy} = \sum_{y \in V : \{x, y\} \in E} g_y = \mathfrak{A}(g)_x,$$

par (9.4). Fixons $x \in V$:

- si $x \in V_2$ alors $g_x = -f_x$ et

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}(g)_x &= \sum_{y \in V_1 : \{x, y\} \in E} g_y = \sum_{y \in V_1 : \{x, y\} \in E} f_y = \sum_{y \in V : \{x, y\} \in E} f_y \\ &= \mathfrak{A}(f)_x = \lambda f_x = -\lambda g_x ; \end{aligned}$$

- si $x \in V_1$ alors $g_x = f_x$ et

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}(g)_x &= \sum_{y \in V_2 : \{x, y\} \in E} g_y = - \sum_{y \in V_2 : \{x, y\} \in E} f_y = - \sum_{y \in V : \{x, y\} \in E} f_y \\ &= -\mathfrak{A}(f)_x = -\lambda f_x = -\lambda g_x. \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathfrak{A}(g) = -\lambda g$ donc, puisque $g \neq 0_{\mathbb{C}^n}$, $-\lambda \in \text{Sp}(\Gamma)$.

ii) $\implies$ iii) : découle de la proposition 9.7.4.

iii) $\implies$ i) : soit f un vecteur propre associé à $-k$: $\mathfrak{A}(f) = -kf$; donc pour tout $y \in V$,

$$\mathfrak{A}(f)_y = \sum_{x \in V : \{x,y\} \in E} f_x = -kf_y \quad (9.5)$$

Soit $w \in V$ tel que $|f_w| \geq |f_x|$ pour tout $x \in V$ ($f_w \neq 0$). Il s'ensuit que

$$|\mathfrak{A}(f)_w| = k|f_w| = \left| \sum_{x \in V : \{x,w\} \in E} f_x \right| \leq \sum_{x \in V : \{x,w\} \in E} |f_x| \leq k|f_w|, \quad (9.6)$$

donc $\sum_{x \in V : \{x,w\} \in E} |f_x| = k|f_w|$; d'où $|f_x| = |f_w|$ pour tout $x \in \Gamma(w)$; mais l'inégalité (9.6) implique aussi

$$\left| \sum_{x \in V : \{x,w\} \in E} f_x \right| = \sum_{x \in V : \{x,w\} \in E} |f_x|,$$

et par le lemme 9.7.5, les f_x , $x \in \Gamma(w)$, ont même argument ; et d'après (9.5), le graphe étant régulier de degré k , $\sum_{x \in V : \{x,w\} \in E} f_x = -kf_w$ d'où $kf_x = -kf_w$ et $f_x = -f_w$; on a donc établi que

$$x \in \Gamma(w) \implies f_x = -f_w.$$

Maintenant si $x \in \Gamma(w)$, comme $|f_x| = |f_w|$, f_x est de module maximum et on peut appliquer ce qui précède : $y \in \Gamma(x) \implies f_y = -f_x = f_w$.

Comme Γ est connexe, on voit donc que pour tout x on a $f_x = \pm f_w$. Posons $V_1 = \{x \in V : f_x = f_w\}$, $V_2 = \{x \in V : f_x = -f_w\}$, on obtient une partition des sommets : $V = V_1 \sqcup V_2$; de plus soit $\{x, y\} \in E$, alors $y \in \Gamma(x)$ donc $f_y = -f_x = f_w$, ainsi $y \in V_1$ et $x \in V_2$; le graphe est biparti. $\square$

Exercice 9.21. Calculer les valeurs propres des graphes suivants :

- i) $\Gamma = K_2$;
- ii) $\Gamma = K_{1,2}$;
- iii) $\Gamma = K_3$.

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$. Pour toute partie $I = \{t_1 < t_2 < \dots < t_k\}$ de $\{1, \dots, n\}$, notons A_I la sous-matrice $(a_{t_i t_j})_{1 \leq i, j \leq k}$; $\det(A_I)$ est appelé **mineur principal d'ordre k** ($k = |I|$), de A ; ainsi les mineurs principaux d'ordre 1 sont les éléments diagonaux a_{ii} et le seul mineur principal d'ordre n est $\det(A)$.

Exercice 9.22. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$. Montrer qu'il y a n mineurs principaux d'ordre 1, $\frac{n(n-1)}{2}$ mineurs principaux d'ordre 2 et plus généralement $\binom{n}{k}$ mineurs principaux d'ordre k , $1 \leq k \leq n$.

Rappelons que la **trace** d'une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$, notée $\text{tr}(A)$, est la somme de ses éléments diagonaux : $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Son polynôme caractéristique est $\Phi(A, x) = \det(xI_n - A)$ (voir chapitre 6), où I_n désigne la matrice identité d'ordre n .

Théorème 9.7.7. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$. On a

$$\begin{aligned}\Phi(A, x) &= \det(xI_n - A) \\ &= x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \cdots + c_k x^{n-k} + \cdots + c_{n-1} x + c_n,\end{aligned}$$

avec

- i) $c_1 = -\text{tr}(A)$, $c_2 = (-1)^2 \sum_{|I|=2} \det(A_I)$: c_2 est la somme des mineurs principaux d'ordre 2, $c_k = (-1)^k \sum_{|I|=k} \det(A_I)$: c_k est la somme des mineurs principaux d'ordre k , $1 \leq k \leq n$, $c_n = (-1)^n \det(A)$.
- ii) si $\Phi(A, x)$ se décompose en produit $\Phi(A, x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_n)$, les λ_i non nécessairement distincts, on a aussi :

$$\begin{aligned}-c_1 &= \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i \\ c_2 &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j, \\ &\vdots \\ (-1)^k c_k &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k}, \quad 1 \leq k \leq n, \\ &\vdots \\ (-1)^n c_n &= \prod_{1 \leq i \leq n} \lambda_i.\end{aligned}$$

Démonstration.

- i) Admis : il faut utiliser les formules donnant le développement du déterminant $\det(xI_n - A) = \Phi(A, x)$.
- ii) Ce sont les formules classiques de Newton donnant les relations entre les coefficients d'un polynôme et ses racines. $\square$

Le polynôme caractéristique fournit de l'information sur le graphe.

Théorème 9.7.8. *Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe simple ayant A comme matrice d'adjacence à laquelle est associé l'endomorphisme hermitien $\mathfrak{A}$ et soit*

$$\Phi(\Gamma, x) = x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \cdots + c_{n-1} x + c_n$$

son polynôme caractéristique. Alors :

- i) $-c_1 = 0$ et la somme des valeurs propres (comptées avec leur multiplicité) de Γ est nulle ;
- ii) $-c_2$ est le nombre d'arêtes de Γ ;
- iii) $-c_3$ est le double du nombre de triangles (ou cliques à 3 sommets) de Γ .

Démonstration. D'après le i) du théorème 9.7.7, on a $c_1 = -\text{tr}(A)$ qui est nul car les termes diagonaux de A sont tous nuls.

$(-1)^2 c_2 = \sum_{|I|=2} \det(A_I)$; les seuls mineurs principaux d'ordre 2 non nuls (la matrice étant symétrique et nulle sur la diagonale) se présentent sous la forme :

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et valent tous -1 . La position des « 1 » sur l'antidiagonale correspond à une arête de Γ et réciproquement une arête de Γ induit un tel mineur ; donc $(-1)^2 c_2 = -$ nombre d'arêtes.

$(-1)^3 c_3 = \sum_{|I|=3} \det(A_I)$; les mineurs principaux d'ordre 3 sont de la forme

$$\det \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \{0, 1\} ;$$

ce déterminant vaut $2abc$, d'où le seul type de mineur d'ordre 3 non nul correspond à l'unique choix $a = b = c = 1$; la disposition des « 1 » autour de la diagonale correspond à un triangle (cycle de longueur 3) dans le graphe (et réciproquement) : $(-1)^3 c_3$ est égal à deux fois le nombre de triangles de Γ . □

Exercice 9.23. Vérifier les assertions du théorème 9.7.8 sur les exemples de l'exercice 9.21.

Exercice 9.24. On considère les matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- i) Représenter graphiquement les graphes Γ_1 et Γ_2 ayant A_1 et A_2 pour matrices d'adjacence.
- ii) Montrer que les coefficients c_1, c_2, c_3, c_6 (notations du théorème 14) sont égaux pour Γ_1 et Γ_2 .
- iii) On peut aussi prouver que c_4 et c_5 sont égaux pour Γ_1 et Γ_2 ; d'où $\Phi(\Gamma_1, x) = \Phi(\Gamma_2, x)$; mais Γ_1 et Γ_2 ne sont pas isomorphes.

9.7.3 Laplacien d'un graphe

Dans ce paragraphe les graphes peuvent avoir des arêtes multiples mais sont supposés **sans boucles**.

Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe sans boucle. Rappelons (§ 6.1) que la matrice des degrés est la matrice diagonale $D = (d_{xy})_{x,y \in V} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$, $n = |V|$, définie par

$$d_{xy} = \begin{cases} d(x) & \text{si } x = y. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et la matrice d'adjacence $A = (a_{xy})_{x,y \in V}$ est la matrice symétrique $n \times n$ définie par

$$a_{xy} = \text{nombre d'arêtes entre } x \text{ et } y.$$

Comme D et A sont réelles symétriques, il leur correspond des endomorphismes hermitiens $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{A}$ de $\mathbb{C}^n$.

La **matrice laplacienne** du graphe Γ est la matrice symétrique $L = D - A$. Il lui correspond un endomorphisme hermitien $\mathfrak{L}(\Gamma)$ de $\mathbb{C}^n$: $\mathfrak{L}(\Gamma) = \mathfrak{D} - \mathfrak{A}$ et on l'appellera **laplacien** de Γ .

On dit qu'un endomorphisme hermitien u est **positif** si pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, on a $\langle u(x), x \rangle \geq 0$; si u, v sont hermitiens, on écrit $u \leq v$ lorsque $v - u$ est positif.

Exercice 9.25.

- i) Montrer que $\leq$ est une relation d'ordre dans l'ensemble des endomorphismes hermitiens.

Indication : on pourra utiliser le fait que u est diagonalisable.

- ii) Si u est hermitien, montrer que u^2 est positif.

Avec les notations du § 9.7.2, rappelons que $f_x = \langle f, x \rangle$; en effet : $\langle f, x \rangle = \langle \sum_{y \in V} f_y y, x \rangle = \sum_{y \in V} f_y \langle y, x \rangle = f_x$.

Théorème 9.7.9. *Le laplacien $\mathfrak{L}$ d'un graphe sans boucle est un opérateur hermitien positif.*

Démonstration. $\mathfrak{L} = \mathfrak{D} - \mathfrak{A}$; pour $f = \sum_{x \in V} f_x x$, on a

$$\mathfrak{D}(f) = \mathfrak{D}\left(\sum_{x \in V} f_x x\right) = \sum_{x \in V} f_x \mathfrak{D}(x) = \sum_{x \in V} f_x d(x) x.$$

D'autre part

$$\mathfrak{A}(f) = \sum_{x \in V} f_x \mathfrak{A}(x) = \sum_{y, x \in V} f_x a_{yx} y = \sum_{y \in V} \left(\sum_{x \in V} f_x a_{yx} \right) y.$$

Donc $\langle \mathfrak{L}(f), f \rangle$ est égal à :

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{D}(f), f \rangle - \langle \mathfrak{A}(f), f \rangle &= \sum_{x \in V} f_x d(x) \overline{f_x} - \sum_{y \in V} \left(\sum_{x \in V} f_x a_{yx} \right) \overline{f_y} \\ &= \sum_{x \in V} f_x \overline{f_x} d(x) - \sum_{x, y \in V} a_{yx} f_x \overline{f_y} \\ &= \sum_{x, y \in V} a_{yx} f_x \overline{f_x} - \sum_{x, y \in V} a_{yx} f_x \overline{f_y}, \end{aligned}$$

en remarquant que $d(x) = \sum_{y \in V} a_{yx}$, on obtient

$$\langle \mathfrak{L}(f), f \rangle = \sum_{x, y \in V} a_{xy} f_x (\overline{f_x} - \overline{f_y}) = \sum_{(x, y) \in V \times V : \{x, y\} \in E} f_x (\overline{f_x} - \overline{f_y}).$$

Or dans la dernière somme, pour chaque arête $\{x, y\}$, on peut regrouper les contributions $f_x (\overline{f_x} - \overline{f_y})$ et $f_y (\overline{f_y} - \overline{f_x})$ dont la somme se factorise en $|f_x - f_y|^2$. D'où

$$\begin{aligned} \sum_{\{x, y\} \in E} f_x (\overline{f_x} - \overline{f_y}) + f_y (\overline{f_y} - \overline{f_x}) &= \sum_{\{x, y\} \in E} (f_x - f_y) (\overline{f_x} - \overline{f_y}) \\ &= \sum_{\{x, y\} \in E} |f_x - f_y|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

il s'ensuit que $\langle \mathfrak{L}(f), f \rangle \geq 0$. □

Corollaire 9.7.10. *Les valeurs propres du laplacien $\mathfrak{L}$ sont positives.*

Démonstration. Ceci est un fait général : si $u \in \mathcal{H}$, $u \geq 0$, et $\lambda \in \text{Sp}(u)$: $u(f) = \lambda f$; alors $0 \leq \langle u(f), f \rangle = \lambda \|f\|^2$ donc $\lambda \geq 0$. $\square$

Proposition 9.7.11. *Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe sans boucle, $n = |V|$ et $\mathfrak{L}$ son laplacien. On a*

- i) $\lambda = 0$ est valeur propre de $\mathfrak{L}$; sa multiplicité est égale au nombre k de composantes connexes de Γ .
- ii) Le rang de $\mathfrak{L}$ est $n - k$.
- iii) Si $\lambda_1 = 0 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ sont les valeurs propres de $\mathfrak{L}$ (répétées selon leur multiplicité), on a $\sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i = 2|E|$.

Démonstration.

- i) Notons $V = \bigsqcup_{1 \leq i \leq k} V_i$ la décomposition connexe de V et montrons que l'espace propre associé à $\lambda = 0$ est $E_0 = \bigoplus_{1 \leq i \leq k} \mathbb{C} \mathbf{1}_i$, où $\mathbf{1}_i = \sum_{x \in V_i} x$:
 – Pour tout i ,

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{L}(\mathbf{1}_i) &= \mathfrak{D}(\mathbf{1}_i) - \mathfrak{A}(\mathbf{1}_i) = \mathfrak{D}\left(\sum_{x \in V_i} x\right) - \mathfrak{A}\left(\sum_{x \in V_i} x\right) \\
 &= \sum_{x \in V_i} \sum_{w \in V} d_{wx} w - \sum_{x \in V_i} \sum_{w \in V} a_{wx} w \\
 &= \sum_{x \in V_i} \sum_{w \in V_i} d_{wx} w - \sum_{x \in V_i} \sum_{w \in V_i} a_{wx} w \\
 &= \sum_{x \in V_i} d(x)x - \sum_{w \in V_i} \left(\sum_{x \in V_i} a_{wx}\right) w \\
 &= \sum_{x \in V_i} d(x)x - \sum_{w \in V_i} d(w)w = 0,
 \end{aligned}$$

prouvant ainsi que $\mathfrak{L}(\mathbf{1}_i) = 0$.

- Soit $f = \sum_{x \in V} f_x x$ un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 0$: $\mathfrak{L}(f) = 0_{\mathbb{C}^n}$; on a

$$\mathfrak{D}(f) = \mathfrak{A}(f),$$

donc

$$\forall x : d(x)f_x = \sum_{y \in V} a_{yx} f_y ; \quad (9.7)$$

fixons $w \in V$ tel que $|f_w| = \max\{|f_x|, x \in V\}$; alors d'après (9.7)

$$d(w)|f(w)| = \left| \sum_{y \in V} a_{wy} f_y \right| \leq \sum_{y \in V} a_{wy} |f_y| \leq d(w)|f(w)|,$$

donnant ainsi

$$\sum_{y \in V} a_{wy} |f_y| = d(w) |f(w)| ;$$

la somme de gauche est constituée de $d(w)$ nombres $|f_y|$ et le terme de droite est constitué de $d(w)$ fois le nombre $|f(w)|$, correspondant aux voisins de w ; on conclut que $|f_y| = |f_w|$ pour tout y voisin de w et par le lemme 9.7.5, les nombres complexes f_y , $y \in \Gamma(w)$, ont aussi même argument ; ils sont donc égaux : $f_y = f_w$ pour tout y adjacent à w , puis par transitivité et connexité pour tout $y \in V_{i_1}$, V_{i_1} étant la composante connexe contenant w . On pose $g^{(1)} = f_w \sum_{x \in V_{i_1}} x = f_w \mathbf{1}_{i_1}$ et $f^{(1)} = f - g^{(1)}$: si $f^{(1)} = 0_{\mathbb{C}^n}$, cela montre que $f = g^{(1)} \in \mathbb{C} \mathbf{1}_{i_1} \subset E_0$; sinon $f^{(1)} = \sum_{x \in V \setminus V_{i_1}} f_x^{(1)} x$ est un vecteur propre associé à $\lambda = 0$;

cela définit un sommet $w_2 \in V_{i_2} \neq V_{i_1}$ maximisant $|f_x^{(1)}|$, $x \in V$; on procède pour $f^{(1)}$ comme ce que l'on vient de faire pour f , obtenant $f_y^{(1)} = f_{w_2}^{(1)}$ pour tout $y \in V_{i_2}$ ($i_2 \neq i_1$) ; puis on note $g^{(2)} = f_{w_2}^{(1)} \sum_{x \in V_{i_2}} x = f_{w_2}^{(1)} \mathbf{1}_{i_2}$ et $f^{(2)} = f^{(1)} - g^{(2)}$:

si $f^{(2)} = 0_{\mathbb{C}^n}$, on obtient $f = g^{(1)} + g^{(2)} \in \mathbb{C} \mathbf{1}_{i_1} + \mathbb{C} \mathbf{1}_{i_2}$;

sinon $f^{(2)}$ est un vecteur propre associé à $\lambda = 0$ auquel on peut appliquer le procédé ; on continue cette construction jusqu'à obtenir pour un entier $j \leq k$ des composantes connexes distinctes $V_{i_1}, \dots, V_{i_j}$ de Γ , des sommets $w_1 \in V_{i_1}, \dots, w_j \in V_{i_j}$ et des vecteurs $f^{(p)}$, $p = 1, \dots, j$, obtenues récursivement par la formule $f^{(p)} = f^{(p-1)} - f_{w_p}^{(p-1)} \mathbf{1}_{i_p}$, $f^{(0)} = f$, $w_1 = w$, et vérifiant la « condition d'arrêt » $f^{(j)} = 0_{\mathbb{C}^n}$.

Comme on visite à chaque étape une nouvelle composante connexe V_{i_j} , le procédé s'arrête, d'où $f = f_{w_1}^{(0)} \mathbf{1}_{i_1} + f_{w_2}^{(1)} \mathbf{1}_{i_2} + \dots + f_{w_j}^{(j-1)} \mathbf{1}_{i_j} \in \bigoplus_{1 \leq p \leq j} \mathbb{C} \mathbf{1}_{i_p} \subset E_0$.

ii) Conséquence immédiate de i), car $\dim V = \dim \text{Im } \mathfrak{L} + \dim \text{Ker } \mathfrak{L}$.

iii) Découle de $\sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i = \text{tr}(L) = \sum_{x \in V} d(x) = 2|E|$. $\square$

Lorsque le graphe est simple et régulier, les valeurs propres du laplacien sont entièrement déterminées par les valeurs propres de la matrice d'adjacence.

Proposition 9.7.12. *Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe simple régulier de degré k . Si la matrice d'adjacence a pour valeurs propres : $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, alors le laplacien $\mathfrak{L}$ a pour valeurs propres : $k - \lambda_1, k - \lambda_2, \dots, k - \lambda_n$.*

Démonstration. Cela découle du fait que si f est un vecteur propre de $\mathfrak{A}$ associé à la valeur propre λ , alors on a $\mathfrak{L} = \Delta(\Gamma) \text{Id} - \mathfrak{A} = k \text{Id} - \mathfrak{A}$, donc $\mathfrak{L}(f) = (k \text{Id} - \mathfrak{A})(f) = k \text{Id}(f) - \mathfrak{A}(f) = kf - \lambda f = (k - \lambda)f$. $\square$

On retrouve le fait que $k = \Delta(\Gamma)$ est valeur propre de la matrice d'adjacence A (puisque 0 est valeur propre de L) et d'après la proposition 9.7.4 que les valeurs propres du laplacien $\mathfrak{L}$ sont positives.

Proposition 9.7.13. *Toute valeur propre λ du laplacien $\mathfrak{L}$ de Γ satisfait $0 \leq \lambda \leq 2\Delta(\Gamma)$.*

Démonstration. On sait que les valeurs propres de $\mathfrak{L}$ sont positives.

On a $\mathfrak{L}(f) = \sum_{x \in V} d(x) f_x x - \sum_{x \in V} f_x \sum_{y \in V} a_{xy} y$.

Soit f un vecteur propre associé à λ et soit w tel que $|f_w| \geq |f_x|$ pour tout $x \in V$; $g = \frac{f}{|f_w|}$ est vecteur propre et l'égalité $\mathfrak{L}(g) = \lambda g$, c'est-à-dire :

$$\sum_{x \in V} g_x d(x) x - \sum_{x \in V} \left(\sum_{y \in V} a_{xy} g_y \right) x = \lambda \sum_{x \in V} g_x x,$$

donne selon la composante x :

$$d(x)g_x - \sum_{y \in V} a_{xy}g_y = \lambda g_x ;$$

et pour $x = w$:

$$d(w)g_w - \sum_y a_{wy}g_y = \lambda g_w,$$

d'où immédiatement : $|\lambda g_w| = \lambda = |d(w)g_w - \sum_y a_{wy}g_y| \leq |d(w)g_w| + |\sum_y a_{wy}g_y| \leq d(w) + \sum_y |a_{wy}||g_y| \leq d(w) + \sum_{y: \{w,y\} \in E} 1 = d(w) + d(w) \leq 2\Delta(\Gamma)$. $\square$

On peut faire un peu mieux.

Proposition 9.7.14. *Les valeurs propres du laplacien $\mathfrak{L}$ d'un graphe sont comprises entre 0 et $\max\{d(x) + d(y), \{x, y\} \in E\}$.*

Démonstration. Laisée en exercice. $\square$

Soit $a = ([x, y], n)$ une arête de $\Gamma = (V; E, N)$, un multigraphe sans boucle; le multigraphe $\Gamma \setminus a$ obtenu en supprimant l'arête a est évidemment sans boucle; mais s'il y a une p -arête entre x et y la contraction de a donne dans Γ/a une $(p - 1)$ -boucle; nous noterons $\Gamma//a$ le graphe obtenu en contractant successivement toutes les arêtes entre x et y (cet

« effeuillage » donne une $(p-2)$ -boucle. . . une 2-boucle, une boucle puis finalement rien!) : $\Gamma//a$ est ainsi un multigraphe sans boucle. Nous appelons cette opération **contraction forte de l'arête a dans le multigraphe Γ** .

Par ailleurs nous savons trouver un arbre de recouvrement de Γ . Évidemment cet arbre n'est pas unique. Notre objectif maintenant est de compter le nombre d'arbres de recouvrement de Γ . Nous allons voir que le laplacien est un outil très utile pour résoudre ce problème. Notons $\tau(\Gamma)$ le nombre d'arbres de recouvrement d'un multigraphe quelconque avec ou sans boucles ; si Γ n'est pas connexe, on a évidemment $\tau(\Gamma) = 0$. **Convention** : si Γ est réduit à un seul sommet, on pose $\tau(\Gamma) = 1$.

Proposition 9.7.15. *Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un multigraphe sans boucle et soit a une arête de Γ . Alors*

$$\tau(\Gamma) = \tau(\Gamma \setminus a) + \tau(\Gamma//a). \quad (9.8)$$

Démonstration. Tout arbre T de recouvrement de Γ qui ne contient pas a est aussi un arbre de recouvrement de $\Gamma \setminus a$ (notons que $\Gamma \setminus a$ est connexe car T est un arbre de recouvrement de ce graphe) ; par conséquent $\tau(\Gamma \setminus a)$ est le nombre d'arbres de recouvrement de Γ qui ne contiennent pas l'arête a .

Il est facile de vérifier qu'il existe une bijection entre l'ensemble des arbres de recouvrement de Γ qui contiennent a et l'ensemble des arbres de recouvrement de $\Gamma//a$. Ainsi le nombre d'arbres de recouvrement contenant a est égal à $\tau(\Gamma//a)$. D'où le résultat. $\square$

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$. Pour toute partie $I \subset \{1, \dots, n\}$ ordonnée, A_I désigne la sous-matrice $(a_{ij})_{i,j \in I}$, $\det(A_I)$ est appelé **mineur principal** d'ordre $k = |I|$ de A ; le mineur principal d'ordre $n-1$ relatif à la partie $I = \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$ sera noté $\det(A_i)$ et appelé mineur relatif à a_{ii} .

Lorsque $\mathfrak{L}$ est le laplacien d'un graphe $\Gamma = (V; E, N)$ sans boucle ayant n sommets, on note L sa matrice dans la base canonique formée par les sommets : pour chaque sommet x , $\det(L_{\hat{x}})$ est donc un mineur principal d'ordre $n-1$ de la matrice $L = (\ell_{xy})_{x,y \in V}$: on l'appellera **mineur relatif à ℓ_{xx}** .

Dans notre contexte, lorsqu'on réalise le laplacien par la matrice $L = (\ell_{xy})_{x,y \in V}$, les mineurs relatifs ne dépendent pas de l'ordre des sommets définissant la base dans laquelle la matrice L de $\mathfrak{L}$ est exprimée.

Convention : lorsque $A \in \mathcal{M}_{1 \times 1}(\mathbb{C})$, on convient que $\det(A_1) = 1$.

Théorème 9.7.16 (KIRCHHOFF, *matrix-tree theorem*).

Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe sans boucle ayant pour matrice laplacienne $L = (\ell_{xy})_{x,y \in V}$. Alors pour tout sommet x le mineur relatif à ℓ_{xx} est égal au nombre d'arbres de recouvrement de Γ :

$$\det(L_{\hat{x}}) = \tau(\Gamma).$$

Démonstration. On établit le résultat par récurrence sur $m = |E|$.

- Pour $m = 0$, Γ est constitué de $n \geq 1$ sommets isolés. Il y a deux cas :
 - α) si $n = 1$, $L = (0) \in \mathcal{M}_{1 \times 1}(\mathbb{C})$; comme par convention on a $\det(L_{\hat{x}}) = 1$ et puisque $\tau(\Gamma) = 1$, le résultat est vérifié;
 - β) si $n \geq 2$: $L = 0_n \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ est la matrice nulle, d'où pour tout $v \in V$ $\det(L_{\hat{v}}) = 0$. Puisque Γ n'est pas connexe, on a aussi $\tau(\Gamma) = 0$, d'où le résultat.
- Supposons l'assertion vraie pour tout graphe ayant m arêtes (où $m \geq 0$); soit Γ un graphe ayant $m + 1$ arêtes :
 - α) s'il existe un sommet $x \in V$ isolé, choisissons pour écrire la matrice L de mettre x en première position dans la base V dans laquelle la matrice L est écrite :

$$L = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & M \end{array} \right);$$

donc $\det(L_{\hat{x}}) = \det(M)$, mais M n'est autre que la matrice laplacienne de $\Gamma' = (V \setminus \{x\}; E)$ pour lequel nous savons (voir proposition 9.7.11) que $0 \in \text{Sp}(\Gamma')$; par conséquent il existe un vecteur $u \in \mathbb{C}^n$ non nul tel que $Mu = 0$; mais alors $\det(L_{\hat{x}}) = \det(M) = 0$; comme un déterminant ne dépend pas de la ligne (respectivement de la colonne) choisie pour le développer (en fonction des mineurs d'ordre $n - 1$), il est clair que $\forall y \neq x$: $\det(L_{\hat{y}}) = 0$; et $\tau(\Gamma) = 0$ car Γ n'est pas connexe;

- β) sinon soit $x \in V$ quelconque : il existe $a \in E$ incidente à x : soit y son autre extrémité; pour écrire la matrice $L = L(\Gamma)$ choisissons de positionner x et y aux deux premières places dans la base V :

$$L(\Gamma) = \left(\begin{array}{cc|c} d(x) & -r & A \\ -r & d(y) & \\ \hline & {}^t A & M \end{array} \right),$$

où $r \geq 1$ est la multiplicité de la multi-arête entre x et y ; on a aussi

$$L(\Gamma \setminus a) = \left(\begin{array}{cc|c} d(x) - 1 & -r + 1 & A \\ -r + 1 & d(y) - 1 & \\ \hline & {}^t A & M \end{array} \right);$$

en mettant z_a (c'est-à-dire le sommet résultant de la contraction de l'arête a) en première position dans l'ensemble des sommets de $\Gamma // a$:

$$L(\Gamma // a) = \left(\begin{array}{c|c} d(u_a) & B \\ \hline {}^t B & M \end{array} \right),$$

avec la propriété sur les degrés $d(u_a) = d(x) + d(y) - r$; on pourrait aussi préciser que B est la somme des deux lignes constituant la matrice A . On a alors

$$\det(L(\Gamma)_{\hat{x}}) - \det(L(\Gamma \setminus a)_{\hat{x}}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} = \det(M), \quad (9.9)$$

car $L(\Gamma)_{\hat{x}}$ et $L(\Gamma \setminus a)_{\hat{x}}$ ne diffèrent que par le coefficient situé sur leur première ligne et leur première colonne : $d(y) \neq d(y) - 1$; ainsi en développant par rapport à la première colonne les deux déterminants en question, on obtient pour un certain k

$$\begin{aligned} \det(L(\Gamma)_{\hat{x}}) &= d(y) \det(M) + k, \\ \det(L(\Gamma \setminus a)_{\hat{x}}) &= (d(y) - 1) \det(M) + k; \end{aligned}$$

d'où la formule (9.9) annoncée.

En outre, on a aussi $\det(L(\Gamma // a)_{\hat{u}_a}) = \det(M)$ et par hypothèse de récurrence $\det(L(\Gamma \setminus a)_{\hat{x}}) = \tau(\Gamma \setminus a)$, d'où $\det(L(\Gamma // a)_{\hat{x}}) = \tau(\Gamma // a)$. En utilisant (9.9), on a bien $\det(L(\Gamma)_{\hat{x}}) = \tau(\Gamma \setminus a) + \tau(\Gamma // a)$ qui vaut $\tau(\Gamma)$ par la proposition 9.7.15. $\square$

Corollaire 9.7.17. *Soit*

$$\Lambda(\Gamma, x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$$

le polynôme caractéristique du laplacien $\mathfrak{L}$ et $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ les valeurs propres (éventuellement répétées) de $\mathfrak{L}$. Alors :

$$\tau(\Gamma) = \frac{1}{n} \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

Démonstration. En effet le ii) du théorème 9.7.7 affirme que

$$(-1)^{n-1}a_{n-1} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-1} \leq n-1} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_{n-1}},$$

la somme étant prise sur toutes les parties à $n-1$ éléments de $\{1, \dots, n\}$; comme $\lambda_1 = 0$ on a $(-1)^{n-1}a_{n-1} = \lambda_2 \dots \lambda_n$, les autres produits contenant λ_1 en facteur et le i) du même théorème dit que $(-1)^{n-1}a_{n-1}$ est la somme des mineurs principaux de taille $n-1$, c'est-à-dire $(-1)^{n-1}a_{n-1} = \sum_{x \in V} \det(L_x) = n\tau(\Gamma)$ d'après le théorème 9.7.16. $\square$

Remarque 9.7.18. La deuxième valeur propre (dans l'ordre croissant) λ_2 du laplacien contient des informations importantes sur le graphe : on peut constater ici que $\lambda_2 = 0 \iff \Gamma$ non connexe.

Exercice 9.26.

i) Montrer que $\tau(K_n) = (n-1)(n-2)$, $n \geq 1$.

Indication : procéder par récurrence sur n .

ii) En déduire les valeurs des mineurs du laplacien $\mathfrak{L}(K_n)$ de K_n .

9.8 Polynôme chromatique

Nous terminons ce chapitre par des notions plus élémentaires. Ici les graphes peuvent avoir des boucles.

Nous avons vu au chapitre 6 la manière de colorier les sommets d'un graphe avec k couleurs. On peut également se demander quel est le nombre de façons distinctes de réaliser un tel coloriage.

Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un multigraphe ayant au moins un sommet et $k \geq 1$. Notons $P_\Gamma(k)$ le nombre de colorations possibles

$$f : V(\Gamma) \longrightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$$

de Γ avec au plus k couleurs. Il est bien naturel de poser $P_\Gamma(k) = 0$ lorsque Γ possède une boucle, puisqu'un sommet adjacent à lui-même ne peut être colorié.

P_Γ est une fonction croissante à valeurs entières $P_\Gamma : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}$.

Il est clair que :

- si $k < \chi(\Gamma)$ alors $P_\Gamma(k) = 0$;
- si $k \geq \chi(\Gamma)$ alors $P_\Gamma(k) > 0$;

($\chi(\Gamma)$ est le nombre chromatique de Γ , voir chapitre 7).

Par conséquent $\chi(\Gamma)$ est le plus petit entier k tel que $P_\Gamma(k) \neq 0$.

Théorème 9.8.1. Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un multigraphe. Alors pour toute arête a :

$$P_{\Gamma}(k) = P_{\Gamma \setminus a}(k) - P_{\Gamma/a}(k), \quad k \geq 1.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon(a) = [x, y]$:

- si a est une 1-boucle $P_{\Gamma}(k) = 0$ et visiblement $P_{\Gamma \setminus a}(k) = P_{\Gamma/a}(k)$;
- s'il y a une p -boucle ($p \geq 2$) entre x et y alors $P_{\Gamma}(k) = P_{\Gamma \setminus a}(k) = P_{\Gamma/a}(k) = 0$;
- si a est une 1-arête, le nombre de k -colorations de $\Gamma \setminus a$ telles que x et y ont des couleurs différentes est le même que le nombre de k -colorations de Γ : ce nombre vaut $P_{\Gamma}(k)$; et le nombre de k -colorations de $\Gamma \setminus a$ telles que x et y ont la même couleur reste le même quand on fusionne les deux sommets x et y , c'est donc le même que dans Γ/a ; ainsi $P_{\Gamma \setminus a}(k) = P_{\Gamma}(k) + P_{\Gamma/a}(k)$;
- s'il y a une p -arête ($p \geq 2$) entre x et y , $P_{\Gamma}(k) = P_{\Gamma \setminus a}(k)$ et $P_{\Gamma/a}(k) = 0$ puisque Γ/a possède une boucle. $\square$

Nous allons déduire de ce théorème particulièrement simple que P_{Γ} peut être considéré, dans une certaine mesure, comme un polynôme ou plus précisément comme une fonction polynomiale de la variable entière k , ce qui revient essentiellement au même puisque $\mathbb{Z}$ est infini (sur un anneau fini, il existe des polynômes non nuls dont la fonction polynomiale est identiquement nulle).

Corollaire 9.8.2. P_{Γ} est une fonction polynomiale.

Démonstration. Montrons qu'il existe un polynôme (qui est nécessairement unique) $F_{\Gamma} \in \mathbb{Z}[x]$ tel que $\forall k \geq 1 \quad F_{\Gamma}(k) = P_{\Gamma}(k)$. Raisonnons par récurrence sur $m = |E|$.

- Si $m = 0$ alors $P_{\Gamma}(k) = k^n$, ($n = |V|$), donc P_{Γ} est la fonction polynomiale x^n .
- $m \curvearrowright m + 1$: soit Γ ayant $m + 1$ arêtes. La fonction $F_{\Gamma} = P_{\Gamma \setminus a} - P_{\Gamma/a}$ est une fonction polynomiale par hypothèse de récurrence ; d'après le théorème 9.8.1, elle satisfait $F_{\Gamma}(k) = P_{\Gamma}(k)$ pour tout entier k ; donc P_{Γ} est elle-même fonction polynomiale. $\square$

P_{Γ} est appelé **polynôme chromatique** de Γ . On a ainsi :

$$P_{\Gamma}(x) = P_{\Gamma \setminus a}(x) - P_{\Gamma/a}(x), \quad \forall a \in E. \quad (9.10)$$

Proposition 9.8.3. *soit $\Gamma = (V; E, N)$ un multigraphe ayant pour composantes connexes $(\Gamma_i)_{1 \leq i \leq c}$, alors*

$$P_\Gamma = \prod_{1 \leq i \leq c} P_{\Gamma_i}.$$

Démonstration. En effet les composantes connexes ont des colorations indépendantes. $\square$

Théorème 9.8.4. *Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un multigraphe ayant $n \geq 1$ sommets, m arêtes et t composantes connexes. Son polynôme chromatique est :*

$$P_\Gamma(x) = x^n + \sum_{1 \leq i \leq n} (-1)^i a_i x^{n-i} \in \mathbb{Z}[x],$$

où $a_1 = m$, $a_i \geq 1$, pour $2 \leq i \leq n - t$, et $a_i = 0$ pour $n - t < i \leq n$.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur m .

– Si $m = 0$, $P_\Gamma(x) = x^n$: c'est clair (on peut d'ailleurs utiliser la proposition 9.8.3).

– Si $m = 1$, choisissons une arête a :

$P_{\Gamma \setminus a}(x) = x^n$, $P_{\Gamma/a}(x) = x^{n-1}$, donc par (9.10), on obtient $P_\Gamma(x) = x^n - x^{n-1}$ qui vérifie bien les propriétés annoncées.

– $m \rightsquigarrow m + 1$: soit Γ ayant $m + 1$ arêtes ; par hypothèse de récurrence,

$$P_{\Gamma \setminus a}(x) = x^n + \sum_{1 \leq i \leq n} (-1)^i b_i x^{n-i}$$

avec $b_1 = m$, $b_i \geq 1$ pour $2 \leq i \leq n - t'$, et $b_i = 0$ pour $n - t' < i \leq n$ (t' étant le nombre de composantes connexes de $\Gamma \setminus a$, on a $t' \geq t$).

Comme $m \geq 1$, on a $n \geq 2$ et à nouveau par hypothèse de récurrence,

$$P_{\Gamma/a}(x) = x^{n-1} + \sum_{1 \leq i \leq n-1} (-1)^i c_i x^{n-1-i},$$

avec $c_1 = m + 1 - 1 = m$, $c_i \geq 1$ pour $2 \leq i \leq n - t$, et $c_i = 0$ pour $n - 1 - t < i < n - 1$.

Par décalage de la variable de sommation ($j = i + 1$), on peut écrire :

$$P_{\Gamma/a}(x) = x^{n-1} + \sum_{2 \leq j \leq n} (-1)^{j-1} c_{j-1} x^{n-j}.$$

D'après (9.10), on obtient donc :

$$P_\Gamma(x) = x^n + (-b_1 - 1)x^{n-1} + \sum_{2 \leq i \leq n} [(-1)^i b_i + (-1)^i c_{i-1}] x^{n-i};$$

les coefficients a_i de P_Γ sont donc :

$$a_1 = b_1 + 1 = m + 1, \quad a_2 = b_2 + c_1 = b_2 + m \geq 1,$$

ensuite $a_i = b_i + c_{i-1}$

* pour $3 \leq i \leq n - t : a_i \geq 1$ (car $c_{i-1} \geq 1$)

* pour $n - t < i \leq n : c_{i-1} = 0$ et $b_i = 0$ (car $i > n - t'$) donc $a_i = 0$. $\square$

Si Γ est connexe, on a $t = 1$ et le théorème 9.8.4 conduit au corollaire suivant.

Corollaire 9.8.5. $\Gamma = (V; E, N)$ est un multigraphe connexe si et seulement si **seul** le terme constant de son polynôme chromatique est nul.

Proposition 9.8.6. Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un multigraphe ayant $n \geq 1$ sommets. Γ est un arbre si et seulement si

$$P_\Gamma(x) = x(x-1)^{n-1}.$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur n .

– Si $n = 1$, $P_\Gamma(x) = x$.

– $n - 1 \curvearrowright n$: soit Γ un graphe ayant n sommets.

Si Γ est un arbre, d'après la proposition 2.2.5, il admet au moins deux sommets de degré 1. Soit x un tel sommet et soit $a = \{x, y\}$ une arête incidente à ce sommet. Le graphe $\Gamma \setminus a$ admet deux composantes connexes : une composante qui est réduite à 1 sommet, dont le polynôme chromatique est x , et une autre qui est un arbre à $n - 1$ sommets (c'est Γ/a), dont le polynôme chromatique est, par hypothèse de récurrence, $x(x-1)^{n-2}$. Donc $P_{\Gamma \setminus a}(x) = xP_{\Gamma/a}(x)$. Ainsi on a : $P_\Gamma(x) = P_{\Gamma \setminus a}(x) - P_{\Gamma/a}(x) = (x-1)P_{\Gamma/a}(x) = x(x-1)^{n-1}$.

Réciproquement soit $\Gamma = (V; E, N)$ ayant comme polynôme chromatique : $P_\Gamma(x) = x(x-1)^{n-1} = x^n - (n-1)x^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1}x$.

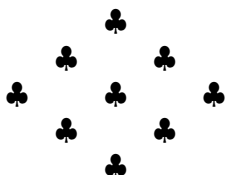
Le théorème 9.8.4 montre que $|E| = n - 1 = |V| - 1$ et le corollaire 9.8.5 montre que Γ est connexe ; d'après le théorème 2.2.1, on en déduit que Γ est un arbre. $\square$

Exercice 9.27. Calculer les polynômes chromatiques

- i) des graphes à 2 arêtes ;
- ii) des graphes connexes à 3 arêtes ;
- iii) du graphe complet K_n .

Exercice 9.28. Vrai ou faux ?

$$\Gamma \simeq \Gamma' \iff P_\Gamma = P_{\Gamma'}.$$



Chapitre 10

Autres perspectives

Ce chapitre introduit de nouveaux objets algébriques, combinatoires et topologiques qui pour la plupart sont peu ou prou issus des graphes. Nous allons aborder de nouveaux concepts comme les polynômes de TUTTE. Même s'ils demeurent encore très mystérieux, ces polynômes ont un grand nombre d'applications notamment en physique statistique. La théorie de RAMSEY est également présente dans les applications en théorie de l'information et en informatique. Nous aborderons aussi la notion de matroïde. Enfin, une courte section sur les hypergraphes achèvera cet ouvrage.

10.1 Polynômes de TUTTE

Au chapitre 9 nous avons introduit le polynôme chromatique d'un graphe $\Gamma = (V; E, N)$, celui-ci vérifie les propriétés suivantes :

- $P_\Gamma(k) = P_{\Gamma \setminus a}(k) - P_{\Gamma/a}(k)$, $a \in E$ (voir théorème 9.8.1) ;
- si le graphe Γ a n sommets et aucune arête alors $P_\Gamma(k) = k^n$.

Ces deux assertions permettent de calculer récursivement les valeurs du polynôme chromatique $P_\Gamma(k)$ d'un graphe arbitraire Γ , en appliquant une suite de contractions et de suppressions des différentes arêtes. Le théorème 9.8.1 montre que la valeur obtenue pour $P_\Gamma(k)$ est nécessairement indépendante de l'ordre des opérations de contraction et de suppression.

S'inspirant des deux propriétés ci-dessus W.T. TUTTE, en 1954, définit un polynôme à deux variables qu'il nomme **polynôme dichromatique**¹.

1. Voir W.T. TUTTE. A contribution to the theory of chromatic polynomials, *Canadian Journal of Mathematics* 6 (1954), 80–91.

Ce polynôme que l'on appelle désormais **polynôme de TUTTE** est un invariant important de la théorie des graphes; il a des applications en théorie des nœuds, en physique statistique, en informatique, en combinatoire²...

Dans ce paragraphe, les graphes sont des multigraphes dans toute leur généralité : **arêtes multiples et boucles sont autorisées**.

Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un multigraphe et $a \in E$. Nous rappelons la notation $\Gamma \setminus a = (V; E \setminus a, N)$ pour le graphe obtenu après suppression de a (il n'y a aucun inconvénient à garder le même ensemble d'étiquettes N).

Soit maintenant $a \in E$; la contraction Γ/a a été définie au § 5.4. On notera $\Gamma/a = (V/a; E/a, N)$ le graphe après contraction. On voit que

$$|E/a| = |E \setminus a| = |E| - 1.$$

Il y a une bijection $\square/ : E \setminus a \longrightarrow E/a$ qui à toute arête $e \neq a$ associe l'arête correspondante e' dont les extrémités ont été éventuellement modifiées par la contraction. Dans cette bijection un sous-ensemble $A \subset E \setminus a$ a le même cardinal que son image notée A/a .

Ainsi, pour $A \subset E$, la notation A/a a un sens dans les deux cas suivants :

- si $a \notin A$;
- si $A = E$.

De manière plus précise, soient $A \subset E$ et $\Gamma(A) = (V; A, N)$ le graphe partiel associé; pour un $a = (\{x, y\}, n_a) \notin A$ on notera $(\Gamma/a)(A)$ le graphe partiel $(V/a; A/a, N)$ obtenu après contraction de a dans Γ : on sait que $V/a = (V \setminus \{x, y\}) \cup \{z_a\}$ et on a de plus $E/a = \{e \in E \mid e \text{ non adjacente à } a\} \cup \{(\{z_a, t\}, n) \mid (\{x, t\}, n) \in E\} \cup \{(\{z_a, t\}, n) \mid (\{y, t\}, n) \in E\} \cup \{([z_a, z_a], n) \mid ([x, y], n) \in E \setminus a\}$.

Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un multigraphe ayant c_Γ composantes connexes. Si $A \subset E$, on note $\Gamma(A) = (V; A, N)$ le graphe partiel associé et $c_{\Gamma(A)}$ son nombre de composantes connexes. On définit :

- le **rang de A dans Γ** par $\text{rang}_\Gamma(A) = |V(\Gamma)| - c_{\Gamma(A)}$;
- le **corang de A dans Γ** par $\text{corang}_\Gamma(A) = |A| - \text{rang}_\Gamma(A)$.

Lorsque $A = E$, on remarquera que cette définition du rang de E coïncide avec celle de $\rho(\Gamma)$ donnée au § 6.1.2 : $\rho(\Gamma) = \text{rang}_\Gamma(E)$.

2. Voir T.H. BRYLAWSKI & J.G. OXLEY. *The Tutte Polynomial and its Applications, Matroid Applications*, N. White ed., Cambridge Univ. Press 1992, 123–225.

Le **polynôme de TUTTE** d'un multigraphe $\Gamma = (V; E, N)$ est défini par

$$\begin{aligned} T_\Gamma(x, y) &= \sum_{A \subseteq E} (x-1)^{\text{rang}_\Gamma(E) - \text{rang}_\Gamma(A)} (y-1)^{\text{corang}_\Gamma(A)} \\ &= \sum_{A \subseteq E} (x-1)^{c_\Gamma(A) - c_\Gamma} (y-1)^{\text{corang}_\Gamma(A)} \in \mathbb{Z}[x, y]. \end{aligned}$$

10.1.1 Propriétés de base

Le théorème ci-dessous fournit des relations reliant les polynômes de TUTTE respectifs des graphes Γ , $\Gamma \setminus a$ et Γ/a ; l'une est similaire à la propriété rappelée ci-dessus portant sur les polynômes chromatiques. Pour cela nous aurons besoin de relations entre les nombres de composantes connexes respectifs de $\Gamma(A)$, $\Gamma(A \cup \{a\})$, $\Gamma \setminus a(A)$ et $(\Gamma/a)(A)$.

Proposition 10.1.1. *Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe, $A \subset E$ et $a \notin A$; on a toujours $c_{\Gamma(A)} = c_{\Gamma \setminus a(A)}$; de plus :*

- i) *si a est un isthme :*
 - $c_{\Gamma(A \cup \{a\})} = c_{\Gamma(A)} - 1 = c_{\Gamma \setminus a(A)} - 1$,
 - *en particulier* $c_\Gamma = c_{\Gamma \setminus a} - 1$;
- ii) *si a est une boucle :*
 - $c_{\Gamma(A \cup \{a\})} = c_{\Gamma(A)} = c_{\Gamma \setminus a(A)}$,
 - *en particulier* $c_\Gamma = c_{\Gamma \setminus a}$;
- iii) *si a n'est ni un isthme, ni une boucle :*
 - $c_\Gamma = c_{\Gamma \setminus a}$,
 - *la contraction d'une arête ne change pas le nombre de composantes connexes :* $c_{\Gamma(A)} = c_{(\Gamma/a)(A)}$,
 - $c_{\Gamma(A \cup \{a\})} = c_{\Gamma(A)} = c_{(\Gamma/a)(A)}$,
 - *en particulier* $c_\Gamma = c_{\Gamma/a}$.

Démonstration. i) La première formule est claire. Montrons la deuxième : si $\varepsilon(a) = \{x, y\}$ et C_x, C_y sont les composantes connexes contenant respectivement x et y dans $\Gamma(A \cup \{a\})$, alors $C_x = C_y$; ces deux composantes « deviennent distinctes » dans $\Gamma \setminus a(A)$, car a est un isthme; les autres composantes connexes ne sont pas modifiées, d'où $c_{\Gamma(A \cup \{a\})} = c_{\Gamma \setminus a(A)} - 1$.

ii) Laissée en exercice.

iii) Seule l'identité $c_\Gamma = c_{\Gamma \setminus a}$ mérite attention, mais la suppression de a ne change pas la connexité, puisque a n'est pas un isthme. $\square$

Théorème 10.1.2. Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un multigraphe. Alors pour $a \in E$ on a :

$$T_{\Gamma}(x, y) = \begin{cases} xT_{\Gamma \setminus a}(x, y), & \text{si } a \text{ est un isthme;} \\ yT_{\Gamma \setminus a}(x, y), & \text{si } a \text{ est une boucle;} \\ T_{\Gamma/a}(x, y) + T_{\Gamma \setminus a}(x, y) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Pour $A \subset E$, on pose :

$$\begin{aligned} f_{\Gamma}(A) &= (x-1)^{\text{rang}_{\Gamma}(E) - \text{rang}_{\Gamma}(A)} (y-1)^{\text{corang}_{\Gamma}(A)} \\ &= (x-1)^{c_{\Gamma}(A) - c_{\Gamma}} (y-1)^{\text{corang}_{\Gamma}(A)}, \end{aligned}$$

de sorte que

$$T_{\Gamma}(x, y) = \sum_{A \subset E} f_{\Gamma}(A) = \sum_{A \subset E: A \not\ni a} f_{\Gamma}(A) + \sum_{A \subset E: A \ni a} f_{\Gamma}(A),$$

ou

$$T_{\Gamma}(x, y) = \sum_{A \subset E: A \not\ni a} (f_{\Gamma}(A) + f_{\Gamma}(A \cup \{a\})), \quad (10.1)$$

car tout B contenant a s'écrit naturellement $B = A \cup \{a\}$ avec $a \notin A$.

On pose $n = |V|$.

i) Si a est un isthme, on a avec le i) de la proposition 10.1.1 ; pour

$A \subset E$ et $a \notin A$:

- $\text{rang}_{\Gamma}(E) = n - c_{\Gamma} = n - (c_{\Gamma \setminus a} - 1)$
 $\quad = \text{rang}_{\Gamma \setminus a}(E \setminus a) + 1,$
- $\text{rang}_{\Gamma}(A) = n - c_{\Gamma(A)} = \text{rang}_{\Gamma \setminus a}(A)$ car $a \notin A$,
- $\text{corang}_{\Gamma}(A) = |A| - \text{rang}_{\Gamma}(A) = |A| - \text{rang}_{\Gamma \setminus a}(A)$
 $\quad = \text{corang}_{\Gamma \setminus a}(A);$

d'où :

$$\begin{aligned} f_{\Gamma}(A) &= (x-1)^{\text{rang}_{\Gamma}(E) - \text{rang}_{\Gamma}(A)} (y-1)^{\text{corang}_{\Gamma}(A)} \\ &= (x-1)^{\text{rang}_{\Gamma \setminus a}(E \setminus a) + 1 - \text{rang}_{\Gamma \setminus a}(A)} (y-1)^{\text{corang}_{\Gamma \setminus a}(A)} \\ &= (x-1) f_{\Gamma \setminus a}(A). \end{aligned}$$

De plus :

- $\text{rang}_{\Gamma}(A \cup \{a\}) = n - c_{\Gamma(A \cup \{a\})} = n - (c_{\Gamma \setminus a}(A) - 1)$
 $\quad = \text{rang}_{\Gamma \setminus a}(A) + 1,$
- $\text{rang}_{\Gamma}(E) = n - c_{\Gamma} = n - c_{\Gamma \setminus a} + 1 = \text{rang}_{\Gamma \setminus a}(E \setminus a) + 1,$
- $\text{corang}_{\Gamma}(A \cup \{a\}) = \text{corang}_{\Gamma \setminus a}(A);$

d'où :

$$\begin{aligned} f_{\Gamma}(A \cup \{a\}) &= (x-1)^{\text{rang}_{\Gamma}(E) - \text{rang}_{\Gamma}(A \cup \{a\})} (y-1)^{\text{corang}_{\Gamma}(A \cup \{a\})} \\ &= (x-1)^{\text{rang}_{\Gamma \setminus a}(E \setminus a) + 1 - \text{rang}_{\Gamma \setminus a}(A) - 1} (y-1)^{\text{corang}_{\Gamma \setminus a}(A)} \\ &= f_{\Gamma \setminus a}(A). \end{aligned}$$

Il suit alors de (10.1) que :

$$\begin{aligned} T_{\Gamma}(x, y) &= \sum_{A \subset E : A \not\ni a} ((x-1)f_{\Gamma \setminus a}(A) + f_{\Gamma \setminus a}(A)) \\ &= x \sum_{A \subset E : A \not\ni a} f_{\Gamma \setminus a}(A) = x \sum_{B \subset E \setminus a} f_{\Gamma \setminus a}(B) = xT_{\Gamma \setminus a}(x, y). \end{aligned}$$

ii) Si a est une boucle, le ii) de la proposition 10.1.1 montre que : pour $A \subset E$ et $a \notin A$:

- $\text{rang}_{\Gamma}(E) = n - c_{\Gamma} = n - c_{\Gamma \setminus a} = \text{rang}_{\Gamma \setminus a}(E \setminus a)$,
 - $\text{rang}_{\Gamma}(A) = n - c_{\Gamma(A)} = n - c_{\Gamma \setminus a(A)} = \text{rang}_{\Gamma \setminus a}(A)$, donc
 - $\text{corang}_{\Gamma}(A) = \text{corang}_{\Gamma \setminus a}(A)$,
 - $\text{rang}_{\Gamma}(A \cup \{a\}) = n - c_{\Gamma(A \cup \{a\})} = n - c_{\Gamma \setminus a(A)} = \text{rang}_{\Gamma \setminus a}(A)$;
- les trois premiers points donnent d'une part $f_{\Gamma}(A) = f_{\Gamma \setminus a}(A)$ et d'autre part, avec le quatrième,

$$\begin{aligned} f_{\Gamma}(A \cup \{a\}) &= (x-1)^{\text{rang}_{\Gamma}(E) - \text{rang}_{\Gamma}(A \cup \{a\})} (y-1)^{\text{corang}_{\Gamma}(A \cup \{a\})} \\ &= (x-1)^{\text{rang}_{\Gamma \setminus a}(E \setminus a) - \text{rang}_{\Gamma \setminus a}(A)} (y-1)^{|A \cup \{a\}| - \text{rang}_{\Gamma}(A \cup \{a\})} \\ &= (x-1)^{\text{rang}_{\Gamma \setminus a}(E \setminus a) - \text{rang}_{\Gamma \setminus a}(A)} (y-1)^{|A| - \text{rang}_{\Gamma \setminus a}(A)} \end{aligned}$$

donc $f_{\Gamma}(A \cup \{a\}) = (y-1)f_{\Gamma \setminus a}(A)$ et avec (10.1) on obtient $T_{\Gamma}(x, y) = yT_{\Gamma \setminus a}(x, y)$.

iii) Si a n'est ni un isthme, ni une boucle, on a avec le iii) de la proposition 10.1.1 ; pour $A \subset E$ et $a \notin A$:

- $c_{\Gamma} = c_{\Gamma \setminus a}$ car a n'est pas un isthme,
- $c_{\Gamma(A)} = c_{\Gamma \setminus a(A)}$ car a n'est pas une arête de $\Gamma(A)$,
- $\text{rang}_{\Gamma}(E) = n - c_{\Gamma} = n - c_{\Gamma \setminus a} = \text{rang}_{\Gamma \setminus a}(E \setminus a)$,
- $\text{corang}_{\Gamma}(A) = \text{corang}_{\Gamma \setminus a}(A)$;

on voit donc que $f_{\Gamma}(A) = f_{\Gamma \setminus a}(A)$.

On a également

- $\text{rang}_{\Gamma}(E) = n - c_{\Gamma} = n - c_{\Gamma/a} = \text{rang}_{\Gamma/a}(E/a) + 1$ car en contractant on diminue d'une unité le nombre de sommets,
- $\text{rang}_{\Gamma}(A \cup \{a\}) = n - c_{\Gamma(A \cup \{a\})} = n - c_{\Gamma/a(A)} = \text{rang}_{\Gamma/a}(A/a) + 1$,

– $\text{corang}_\Gamma(A \cup \{a\}) = |A \cup \{a\}| - \text{rang}_\Gamma(A \cup \{a\}) = 1 + |A| - \text{rang}_{\Gamma/a}(A/a) - 1 = |A/a| - \text{rang}_{\Gamma/a}(A/a) = \text{corang}_{\Gamma/a}(A/a)$;
de là : $f_\Gamma(A \cup \{a\}) = f_{\Gamma/a}(A/a)$.

Puis

$$\begin{aligned} T_\Gamma(x, y) &= \sum_{A \subseteq E: A \not\ni a} (f_{\Gamma \setminus a}(A) + f_{\Gamma/a}(A/a)) \\ &= \sum_{B \subseteq E \setminus a} f_{\Gamma \setminus a}(B) + \sum_{B \subseteq E/a} f_{\Gamma/a}(B), \end{aligned}$$

d'où la formule annoncée. $\square$

Proposition 10.1.3. *Si a est un isthme :*

$$T_\Gamma(x, y) = xT_{\Gamma/a}(x, y).$$

Démonstration. En effet dans ce cas, si $A \not\ni a$,

$$\begin{aligned} c_{\Gamma(A)} &= c_{(\Gamma/a)(A)} + 1, \\ c_\Gamma(A \cup \{a\}) &= c_{(\Gamma/a)(A)}. \end{aligned}$$

La première formule vient de ce que, si $\varepsilon(a) = \{x, y\}$ est un isthme dans Γ , alors dans $\Gamma(A)$, les composantes connexes contenant respectivement x et y sont distinctes, alors que dans Γ/a , les composantes connexes correspondantes coïncident. La seconde formule provient du iii) de la proposition 10.1.1.

D'où :

- $\text{rang}_\Gamma(E) = \text{rang}_{\Gamma/a}(E/a) + 1$,
- $\text{rang}_\Gamma(A) = \text{rang}_{\Gamma/a}(A/a)$,
- $\text{corang}_\Gamma(A) = \text{corang}_{\Gamma/a}(A/a)$.

Ce sont les mêmes relations que celles déjà vues pour $\Gamma \setminus a$, elles conduisent donc aux mêmes expressions, *i.e.*

$$f_\Gamma(A) = f_{\Gamma/a}(A/a), \quad f_\Gamma(A \cup \{a\}) = f_{\Gamma/a}(A),$$

et finalement $T_\Gamma(x, y) = xT_{\Gamma/a}(x, y)$. $\square$

Réciproquement, on peut établir la proposition suivante.

Proposition 10.1.4. *Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un multigraphe et $U_\Gamma(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ un polynôme vérifiant les propriétés suivantes :*

$$U_\Gamma(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Gamma \text{ n'a pas d'arête,} \\ xU_{\Gamma \setminus a}(x, y), & \text{si } a \text{ est un isthme,} \\ yU_{\Gamma/a}(x, y), & \text{si } a \text{ est une boucle,} \\ U_{\Gamma/a}(x, y) + U_{\Gamma \setminus a}(x, y) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $U_\Gamma(x, y) = T_\Gamma(x, y)$.

Démonstration. On démontre aisément ce résultat par récurrence sur le nombre m d'arêtes.

- Si $m = 0$ et $|V| = n$, alors $\emptyset$ est la seule partie de E : $c_\Gamma(\emptyset) = n$, $\text{rang}_\Gamma(\emptyset) = 0$ et $\text{corang}_\Gamma(\emptyset) = 0$. D'où

$$\begin{aligned} 1 = U_\Gamma(x, y) &= (x - 1)^0(y - 1)^0 \\ &= \sum_{A \subseteq E} (x - 1)^{c_\Gamma - c_\Gamma(A)}(y - 1)^{\text{corang}_\Gamma(A)} = T_\Gamma(x, y). \end{aligned}$$

- $m - 1 \curvearrowright m$: soit $a \in A$
 # si a est un isthme on a d'après l'hypothèse de récurrence :

$$U_\Gamma(x, y) = xU_{\Gamma \setminus a}(x, y) = xT_{\Gamma \setminus a}(x, y) = T_\Gamma(x, y),$$

d'après le théorème 10.1.2,

si a est une boucle, idem,

si a n'est ni un isthme, ni une boucle : même raisonnement. $\square$

Proposition 10.1.5. *soit $\Gamma = (V; E, N)$ un multigraphe.*

- i) *Si $\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma''$ et s'il n'y a pas d'arêtes entre Γ' et Γ'' , alors $T_\Gamma(x, y) = T_{\Gamma'}(x, y)T_{\Gamma''}(x, y)$.*
- ii) *En particulier si $(\Gamma_i)_{i \in I}$ (I fini) sont les composantes connexes de Γ , alors*

$$T_\Gamma(x, y) = \prod_{i \in I} T_{\Gamma_i}(x, y).$$

Démonstration. Montrons i), en écrivant, avec des notations évidentes, $T_\Gamma(x, y) = \sum_{A \subseteq E} (x - 1)^{u_A}(y - 1)^{v_A}$; toute partie A de E s'écrit de façon unique $A = A' \cup A''$, où $A' \subset E' = E(\Gamma')$ et $A'' \subset E'' = E(\Gamma'')$; en outre les exposants satisfont $u_A = u_{A'} + u_{A''}$, $v_A = v_{A'} + v_{A''}$ (avec $u_A = c_\Gamma - c_{\Gamma(A)}$, $v_A = \text{corang}_\Gamma(A)$ et des notations semblables avec A' et A''). D'où clairement $T_\Gamma(x, y) = T_{\Gamma'}(x, y) \cdot T_{\Gamma''}(x, y)$. $\square$

Donnons quelques exemples de calcul du polynôme de TUTTE. Nous utiliserons les notations suivantes :

- graphe à n sommets isolés : $\overline{K}_n$ (complémentaire de K_n) ;
- graphe constitué d'une unique m -boucle : B_m ;
- graphe constitué d'une unique m -arête : A_m ;
- cycle à n sommets : C_n .

Alors :

- $T_{\overline{K}_n}(x, y) = 1$.
- $T_{B_m}(x, y) = y^m$: par récurrence $T_{B_{m+1}}(x, y) = yT_{B_m}(x, y)$.
- Si Γ est une forêt à m arêtes $T_\Gamma(x, y) = x^m$: par récurrence, toute a étant un isthme $T_\Gamma(x, y) = xT_{\Gamma \setminus a}(x, y)$. Cela donne en particulier le polynôme de TUTTE pour une chaîne à m arêtes.
- $T_{K_3}(x, y) = x^2 + x + y$: on enlève une arête a d'où $T_{K_3}(x, y) = T_{K_3/a}(x, y) + T_{K_3 \setminus a}(x, y)$; or $K_3/a = A_2$ et $K_3 \setminus a$ est un arbre à 2 arêtes, donc $T_{K_3}(x, y) = x + y + x^2$.

Exercice 10.1. Démontrer que :

- i) $T_{C_n} = y + x + \dots + x^{n-1} (n \geq 2)$;
- ii) $T_{A_m}(x, y) = x + y + \dots + y^{m-1} (m \geq 2)$;
- iii) $T_{K_4}(x, y) = x^3 + 3x^2 + 2x + 4xy + 2y + 3y^2 + y^3$.

Indication : on sera amené à calculer $T_{A_2^2}(x, y)$ où A_2^2 est le graphe connexe à 3 sommets constitué de 2 arêtes doubles. On doit trouver $T_{A_2^2}(x, y) = (T_{A_2}(x, y))^2$.

On peut vérifier à travers ces exemples que l'on a $\deg_x T_\Gamma(x, y) = \text{rang}_\Gamma(E)$ et $\deg_y T_\Gamma(x, y) = \text{corang}_\Gamma(E)$.

La proposition 10.1.4 peut être généralisée de la manière suivante : on introduit, outre les indéterminées x, y , trois autres indéterminées α, β, γ (le but étant de mettre en évidence ainsi plusieurs polynômes introduits précédemment).

Théorème 10.1.6 (TUTTE, version polynôme). *Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un multigraphe. Soit $U_\Gamma \in \mathbb{C}[x, y, \alpha, \beta, \gamma]$ un polynôme vérifiant les propriétés récursives suivantes :*

$$U_\Gamma = \begin{cases} \alpha^{|V|} & \text{si } \Gamma \text{ n'a pas d'arête,} \\ xU_{\Gamma \setminus a} & \text{si } a \in E \text{ est un isthme,} \\ yU_{\Gamma \setminus a} & \text{si } a \in E \text{ est une boucle,} \\ \beta U_{\Gamma \setminus a} + \gamma U_{\Gamma/a} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors ce polynôme s'écrit :

$$U_\Gamma = \alpha^{\text{c}_\Gamma} \beta^{\text{corang}_\Gamma} \gamma^{\text{rang}_\Gamma} T_\Gamma \left(\frac{\alpha x}{\gamma}, \frac{y}{\beta} \right)$$

où l'on a posé $\text{corang}_\Gamma = \text{corang}_\Gamma(E)$, $\text{rang}_\Gamma = \text{rang}_\Gamma(E)$. En outre $U_\Gamma \in \mathbb{Z}[x, y, \alpha, \beta, \gamma]$.

Démonstration. D'abord montrons par récurrence sur le nombre d'arêtes qu'il existe au plus 1 polynôme vérifiant les hypothèses requises.

Supposons qu'il y en ait deux, U_Γ et U'_Γ . Si $E = \emptyset$ alors : $U_\Gamma = \alpha^{|V|} = U'_\Gamma$.

Supposons la propriété vraie pour tout graphe ayant $m - 1$ arêtes. Soit Γ un graphe ayant m arêtes.

- Si $a \in E$ est un isthme, $U_\Gamma = xU_{\Gamma \setminus a} = xU'_{\Gamma \setminus a} = U'_\Gamma$.
- Si $a \in E$ est une boucle, $U_\Gamma = yU_{\Gamma \setminus a} = yU'_{\Gamma \setminus a} = U'_\Gamma$.
- Si $a \in E$ n'est ni une boucle ni un isthme, $U_\Gamma = \beta U_{\Gamma \setminus a} + \gamma U_{\Gamma/a} = \beta U'_{\Gamma \setminus a} + \gamma U'_{\Gamma/a} = U'_\Gamma$.

Il suffit donc de prouver que la fraction rationnelle

$$U_\Gamma = \alpha^{c_\Gamma} \beta^{\text{corang}_\Gamma} \gamma^{\text{rang}_\Gamma} T_\Gamma \left(\frac{\alpha x}{\gamma}, \frac{y}{\beta} \right)$$

satisfait bien les quatre propriétés indiquées ; mais d'abord c'est bien un polynôme en α, β, γ, x et y car $\deg_x T_\Gamma(x, y) = \text{rang}_\Gamma$, $\deg_y T_\Gamma(x, y) = \text{corang}_\Gamma$; U_Γ est somme de termes de la forme

$$\alpha^{c_\Gamma} \beta^{\text{corang}_\Gamma} \gamma^{\text{rang}_\Gamma} \left(\frac{\alpha x - 1}{\gamma} \right)^i \left(\frac{y - 1}{\beta} \right)^j, \quad \begin{array}{l} 0 \leq i \leq \text{rang}_\Gamma, \\ 0 \leq j \leq \text{corang}_\Gamma ; \end{array}$$

- si Γ est sans arête $\Gamma = \overline{K}_n$: $c_\Gamma = n$, $\text{rang}_\Gamma = \text{corang}_\Gamma = 0$, donc $U_\Gamma = \alpha^{|V|}$;
- si $a \in E$ est un isthme : $c_{\Gamma \setminus a} = c_\Gamma + 1$, $\text{rang}_{\Gamma \setminus a} = \text{rang}_\Gamma - 1$, $\text{corang}_{\Gamma \setminus a} = \text{corang}_\Gamma$, donc

$$U_\Gamma = \alpha^{c_{\Gamma \setminus a} - 1} \beta^{\text{corang}_{\Gamma \setminus a}} \gamma^{\text{rang}_{\Gamma \setminus a} + 1} \frac{\alpha x}{\gamma} T_{\Gamma \setminus a} \left(\frac{\alpha x}{\gamma}, \frac{y}{\beta} \right) = x U_{\Gamma \setminus a} ;$$

- si $a \in E$ est une boucle : $c_{\Gamma \setminus a} = c_\Gamma$, $\text{rang}_{\Gamma \setminus a} = \text{rang}_\Gamma$, $\text{corang}_{\Gamma \setminus a} = \text{corang}_\Gamma - 1$, donc

$$U_\Gamma = \alpha^{c_{\Gamma \setminus a}} \beta^{\text{corang}_{\Gamma \setminus a} + 1} \gamma^{\text{rang}_{\Gamma \setminus a}} \frac{y}{\beta} T_{\Gamma \setminus a} \left(\frac{\alpha x}{\gamma}, \frac{y}{\beta} \right) = y U_{\Gamma \setminus a} ;$$

- sinon $c_{\Gamma \setminus a} = c_\Gamma$, $\text{rang}_{\Gamma \setminus a} = \text{rang}_\Gamma$, $\text{corang}_{\Gamma \setminus a} = \text{corang}_\Gamma - 1$, $c_{\Gamma/a} =$

$c_\Gamma, \text{rang}_{\Gamma/a} = \text{rang}_\Gamma - 1, \text{corang}_{\Gamma/a} = \text{corang}_\Gamma$, donc

$$\begin{aligned} U_\Gamma &= \alpha^{c_\Gamma} \beta^{\text{corang}_\Gamma} \gamma^{\text{rang}_\Gamma} \left(T_{\Gamma \setminus a} \left(\frac{\alpha x}{\gamma}, \frac{y}{\beta} \right) + T_{\Gamma/a} \left(\frac{\alpha x}{\gamma}, \frac{y}{\beta} \right) \right) \\ &= \alpha^{c_{\Gamma \setminus a}} \beta^{\text{corang}_{\Gamma \setminus a} + 1} \gamma^{\text{rang}_{\Gamma \setminus a}} T_{\Gamma \setminus a} \left(\frac{\alpha x}{\gamma}, \frac{y}{\beta} \right) \\ &\quad + \alpha^{c_{\Gamma/a}} \beta^{\text{corang}_{\Gamma/a}} \gamma^{\text{rang}_{\Gamma/a} + 1} T_{\Gamma/a} \left(\frac{\alpha x}{\gamma}, \frac{y}{\beta} \right) \\ &= \beta U_{\Gamma \setminus a} + \gamma U_{\Gamma/a}. \quad \square \end{aligned}$$

Remarque 10.1.7. Il est facile de voir que dans cet énoncé on peut remplacer, dans le cas isthme, $xU_{\Gamma \setminus a}$ par $\alpha xU_{\Gamma/a}$.

Théorème 10.1.8 (TUTTE, version spécialisation). *Soient $x, y \in \mathbb{C}$ et $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, avec $\beta, \gamma \neq 0$ fixés ; il existe pour chaque multigraphe $\Gamma = (V; E, N)$ un unique $f(\Gamma) \in \mathbb{C}$ tel que :*

$$f(\Gamma) = \begin{cases} \alpha^{|V|} & \text{si } \Gamma \text{ n'a pas d'arête,} \\ xf(\Gamma \setminus a) & \text{si } a \in E \text{ est un isthme,} \\ yf(\Gamma \setminus a) & \text{si } a \in E \text{ est une boucle,} \\ \beta f(\Gamma \setminus a) + \gamma f(\Gamma/a) & \text{sinon,} \end{cases}$$

et on a $f(\Gamma) = \alpha^{c_\Gamma} \beta^{\text{corang}_\Gamma} \gamma^{\text{rang}_\Gamma} T_\Gamma \left(\frac{\alpha x}{\gamma}, \frac{y}{\beta} \right)$.

La preuve est exactement la même ! En effet le statut des paramètres ne joue aucun rôle dans la preuve.

Remarque 10.1.9. De même $xf(\Gamma \setminus a)$ peut être remplacé, dans le cas isthme, par $\alpha xf(\Gamma/a)$.

La correspondance $\Gamma \mapsto f(\Gamma)$ est un **invariant** en ce sens que si $\Gamma_1 \simeq \Gamma_2$ alors $f(\Gamma_1) = f(\Gamma_2)$: en effet $c_{\Gamma_1} = c_{\Gamma_2}$, $\text{corang}_{\Gamma_1} = \text{corang}_{\Gamma_2}$ et $T_{\Gamma_1} = T_{\Gamma_2}$.

Ce théorème permet de retrouver des polynômes connus. On en donne quelques exemples dans la suite.

10.1.2 Polynôme de TUTTE et polynôme chromatique

On a vu au chapitre 9 (voir théorème 9.8.1) que

$$P_\Gamma(x) = P_{\Gamma \setminus a}(x) - P_{\Gamma/a}(x).$$

Cela suggère un lien éventuel avec le polynôme de TUTTE.

Proposition 10.1.10. *soit $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe tel que $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = K_r, r \geq 1$ (graphe complet à r sommets). Alors :*

$$P_\Gamma(x) = \frac{P_{\Gamma_1}(x)P_{\Gamma_2}(x)}{P_{K_r}(x)}.$$

Démonstration. Il suffit d'établir la formule pour tout entier $x = k \geq r$. On a :

$$\begin{aligned} - P_{\Gamma_1}(k) &= P_{K_r}(k) \frac{P_{\Gamma_1}(k)}{P_{K_r}(k)}; \\ - P_{\Gamma_2}(k) &= P_{K_r}(k) \frac{P_{\Gamma_2}(k)}{P_{K_r}(k)}. \end{aligned}$$

$\frac{P_{\Gamma_1}(k)}{P_{K_r}(k)}$ s'interprète comme le nombre de possibilités p_1 de prolonger une coloration de K_r en une coloration de Γ_1 ; de même $p_2 = \frac{P_{\Gamma_2}(k)}{P_{K_r}(k)}$ est le nombre de possibilités de prolonger une coloration de K_r en une coloration de Γ_2 .

Mais par ailleurs une coloration de Γ s'obtient en prenant une coloration de K_r et en la prolongeant à Γ_1 : p_1 façons, puis à Γ_2 : comme les différences de graphes $\Gamma_1 \setminus K_r$ et $\Gamma_2 \setminus K_r$ sont sans arête commune et sans sommet commun, $p_1 p_2$ est le nombre de prolongations possibles : $P_\Gamma(k) = p_1 p_2 P_{K_r}(k) = \frac{P_{\Gamma_1}(k)}{P_{K_r}(k)} \frac{P_{\Gamma_2}(k)}{P_{K_r}(k)} P_{K_r}(k)$, d'où la formule annoncée. $\square$

Ce résultat conduit à la proposition suivante.

Proposition 10.1.11. *soit $\Gamma = (V; E, N)$ un multigraphe et $a \in E$ un isthme. Alors*

$$P_\Gamma(x) = \frac{x-1}{x} P_{\Gamma \setminus a}(x).$$

Démonstration. Posons $\varepsilon(a) = \{x, y\}$; on a $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ avec $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{a\}$. Comme $\{a\} = K_2$ et $P_{K_2}(x) = x(x-1)$, la proposition 10.1.10 montre que $P_\Gamma(x) = \frac{P_{\Gamma_1}(x)P_{\Gamma_2}(x)}{x(x-1)}$; mais par ailleurs $P_{\Gamma_1}(x) = (x-1)P_{\Gamma_1 \setminus a}(x)$ et $P_{\Gamma_2}(x) = (x-1)P_{\Gamma_2 \setminus a}(x)$ car a est une arête pendante dans Γ_1 et dans Γ_2 , d'où

$$\begin{aligned} P_\Gamma(x) &= \frac{(x-1)^2 P_{\Gamma_1 \setminus a}(x) P_{\Gamma_2 \setminus a}(x)}{x(x-1)} \\ &= \frac{x-1}{x} P_{\Gamma_1 \setminus a}(x) P_{\Gamma_2 \setminus a}(x) = \frac{x-1}{x} P_{\Gamma \setminus a}(x). \end{aligned} \quad \square$$

Remarque 10.1.12. Cet énoncé équivaut à $P_{\Gamma \setminus a}(x) = x P_{\Gamma/a}(x)$ (en appliquant la formule de récurrence des polynômes chromatiques).

Théorème 10.1.13. *soit $\Gamma = (V; E, N)$ un multigraphe ayant n sommets et c composantes connexes ; alors :*

$$P_{\Gamma}(k) = (-1)^{n-c} k^c T_{\Gamma}(1 - k, 0).$$

Démonstration. En utilisant la proposition 10.1.11 on a :

$$P_{\Gamma}(x) = \begin{cases} x^n & \text{si } \Gamma \text{ n'a pas d'arête,} \\ \frac{x-1}{x} P_{\Gamma \setminus a}(x) & \text{si } a \text{ est un isthme,} \\ 0 & \text{si } a \text{ est une boucle,} \\ P_{\Gamma}(\Gamma \setminus a)(x) - P_{\Gamma/a}(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

et le théorème 10.1.8 avec comme paramètres $k = \frac{x-1}{x}$, $y = 0$, $\alpha = k$, $\beta = 1$ et $\gamma = -1$ donne le résultat (on se souvient que $P_{\Gamma}(x) = 0$ dès que Γ possède une boucle). $\square$

10.1.3 Polynôme de TUTTE et arbres de recouvrement

La formule 9.8 suggère aussi un lien entre $\tau(\Gamma)$ et le polynôme de TUTTE. Rappelons ce qu'est la contraction dans un multigraphe $\Gamma = (V; E, N)$ sans boucle : soit $a = ([x, y], n)$ une arête de Γ ; $\Gamma // a$, graphe obtenu en contractant successivement toutes les arêtes entre x et y , est un multigraphe sans boucle.

Avec nos conventions cette formule s'écrit :

$$\tau(\Gamma) = \tau(\Gamma \setminus a) + \tau(\Gamma // a),$$

mais en fait $\tau(\Gamma // a) = \tau(\Gamma/a)$ car la seule différence entre les deux graphes $\Gamma // a$ et Γ/a est la présence éventuelle de boucles au sommet fusionné z_a dans le second ; cela ne change donc pas le nombre d'arbres de recouvrement.

Théorème 10.1.14. *Soit $\Gamma = (V; E, N)$ un multigraphe connexe non nul ; alors le nombre d'arbres de recouvrement de Γ est égal à :*

$$\tau(\Gamma) = T_{\Gamma}(1, 1).$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur le nombre d'arêtes en utilisant les résultats précédents obtenus sur le polynôme de TUTTE.

Si $|E| = \emptyset$, on applique directement la formule définissant le polynôme de TUTTE : le graphe n'a qu'un sommet donc $\tau(\Gamma) = 1 = T_{\Gamma}(1, 1)$ en convenant que $0^0 = 1$.

Supposons l'assertion vraie pour tout graphe ayant $m - 1$ arêtes, $m \geq 1$:

- si $a \in E$ est une boucle alors : $\tau(\Gamma) = \tau(\Gamma \setminus a) = T_{\Gamma \setminus a}(1, 1) = \frac{1}{1} T_{\Gamma}(1, 1) = T_{\Gamma}(1, 1)$ par le théorème 10.1.2 ;
- si $a \in E$ est un isthme $\tau(\Gamma) = \tau(\Gamma/a) = T_{\Gamma/a}(1, 1) = \frac{1}{1} T_{\Gamma}(1, 1) = T_{\Gamma}(1, 1)$ par la proposition 10.1.3 ;
- si $a \in E$ n'est ni une boucle ni un isthme, alors d'après ci-dessus on a $\tau(\Gamma) = \tau(\Gamma \setminus a) + \tau(\Gamma // a) = T_{\Gamma \setminus a}(1, 1) + T_{\Gamma // a}(1, 1) = T_{\Gamma}(1, 1)$. $\square$

10.1.4 Polynôme de TUTTE et planarité

Nous introduisons dans ce paragraphe un résultat élégant lié à la planarité.

Théorème 10.1.15. *soit $\Gamma = (V; E, N)$ un graphe planaire non nul et Γ^* son dual ; alors :*

$$T_{\Gamma}(x, y) = T_{\Gamma^*}(y, x).$$

Démonstration. Par récurrence sur le nombre d'arêtes.

D'après la définition du dual d'un graphe il existe une bijection f^* entre l'ensemble des arêtes E de Γ et l'ensemble des arêtes E^* de Γ^* . De plus on « voit » facilement (preuve admise) que a^* est une boucle (respectivement un isthme) de Γ^* si et seulement si a est un isthme (respectivement une boucle) de Γ . Donc $\Gamma^* \setminus a^*$ et Γ^*/a^* sont les duals respectifs de Γ/a et de $\Gamma \setminus a$; on a $(\Gamma \setminus a)^* \simeq \Gamma^*/a^*$.

Si $m = 0$, alors Γ a 1 face donc Γ^* est un sommet isolé ; ainsi $T_{\Gamma}(x, y) = 1 = T_{\Gamma^*}(y, x)$.

$m - 1 \curvearrowright m$: soit Γ un graphe ayant m arêtes et a une arête ;

- si a est un isthme, alors d'après la proposition 10.1.3, $T_{\Gamma}(x, y) = x T_{\Gamma/a}(x, y) = x T_{(\Gamma/a)^*}(y, x) = x T_{\Gamma^* \setminus a^*}(y, x)$; mais a^* boucle de Γ^* donne $T_{\Gamma^*}(y, x) = x T_{\Gamma^* \setminus a^*}(y, x)$, donc $T_{\Gamma}(x, y) = T_{\Gamma^*}(y, x)$;
- si a est une boucle, on procède à un calcul analogue ;
- sinon $T_{\Gamma}(x, y) = T_{\Gamma/a}(x, y) + T_{\Gamma \setminus a}(x, y)$
 $= T_{\Gamma^* \setminus a^*}(y, x) + T_{\Gamma^*/a^*}(y, x) = T_{\Gamma^*}(y, x)$. $\square$

10.1.5 Autres applications

En mécanique statistique le modèle d'ISING sur un graphe aléatoire a pour fonction de (ré)partition $R_{\Gamma}(p) = (1 - p)^{|E|} 2^{c(\Gamma)} v^{r(\Gamma)} T_{\Gamma}(\frac{v+2}{v}, v+1)$. Ce modèle a été généralisé en modèle de POTTS, puis en modèle des « paquets aléatoires » (*random cluster model*) : soit $0 < p < 1, q > 0$; la fonction de (ré)partition est alors :

$$R_{\Gamma}(q, p) = (1 - p)^{|E|} q^{c(\Gamma)} v^{r(\Gamma)} T_{\Gamma}(\frac{v+q}{v}, v+1).$$

Exercice 10.2. Démontrer que :

- i) $T_\Gamma(2, 1)$ est le nombre de forêts de recouvrement ;
- ii) $T_\Gamma(1, 2)$ est le nombre de graphes partiels connexes ;
- iii) $T_\Gamma(2, 2)$ est le nombre de graphes partiels.

Quelques exemples :

- Si on fixe un groupe abélien A et si on note $q_\Gamma(A)$ le nombre de A -flots partout non nuls, alors on a $q_\Gamma(A) = (-1)^{\text{corang}_\Gamma} T_\Gamma(0, 1 - |A|)$.
- Soit $a(\Gamma)$ le nombre d'orientations acycliques (ce sont les orientations du graphe Γ de telle sorte qu'il ne contienne pas de circuit) : alors $a(\Gamma) = T_\Gamma(2, 0)$.
- Soit $s \in V$ et notons $a_s(\Gamma)$ le nombre d'orientations acycliques dans lesquelles s est la seule et unique source : alors $a_s(\Gamma) = T_\Gamma(1, 0)$.
- Graphes aléatoires : n étant fixé, on considère le graphe complet à n sommets $K_n = (V; E)$. Le tirage aléatoire d'une arête $e \in E$ est effectué uniformément avec probabilité $p : p = \mathbf{Prob}[a = e] = \frac{1}{N}$, avec $N = n(n - 1)/2$. On pose $q = 1 - p$; si H est un sous-graphe fixé arbitrairement de K_n , le tirage aléatoire d'un sous-graphe K de K_n donne une probabilité

$$\mathbf{Prob}[H = K] = p^{e(H)} q^{N - e(H)} \quad (e(H) = \text{nombre d'arêtes de } H).$$

Plus généralement on remplace K_n par un graphe $\Gamma = (V; E)$; si on s'intéresse au rang du sous-graphe K obtenu lors du tirage, on a le lien suivant avec les polynômes de TUTTE :

$$\mathbf{Prob}[\text{rang}_K = \text{rang}_\Gamma] = p^{\text{rang}_\Gamma} q^{\text{corang}_\Gamma} T_\Gamma(1, 1/q), \quad \begin{array}{l} 0 < p < 1, \\ q = 1 - p. \end{array}$$

- On peut également interpréter le polynôme des couplages (non introduit dans ce livre), ainsi que le polynôme de JONES, invariant fondamental de la théorie des nœuds.

10.2 Théorie de RAMSEY

Dans ce paragraphe, **les graphes sont supposés simples**.

La théorie de RAMSEY a des applications en mathématiques, en théorie de l'information, en logique, en informatique³. . . Elle « mesure » combien un objet est « ordonné ou désordonné » ou plutôt comment « l'ordre

3. Voir V. ROSTA. Ramsey Theory Applications, *The Electronic Journal of Combinatorics*, dynamics survey, 2004.

ou le désordre » apparaît dans une structure. Elle généralise le principe des tiroirs de DIRICHLET (1834) : si n cravates sont réparties dans m tiroirs et si $n > m$, alors au moins un tiroir doit contenir deux cravates (au moins). On peut reformuler ce principe de la manière suivante : si E et F sont deux ensembles finis, tels que $|E| > |F|$ et si f est une application de E dans F , alors il existe un élément de F qui admet au moins deux antécédents par f dans E . Ce principe, qui paraît élémentaire, a été notamment utilisé par C. SIEGEL de façon magistrale en théorie des nombres. Le théorème de RAMSEY généralise ce principe en un certain sens : combien d'éléments d'une certaine structure doivent être considérés pour qu'une propriété particulière se vérifie ? En reprenant l'exemple des cravates rangées dans un certain nombre de tiroirs : de combien de cravates doit-on disposer au minimum pour être sûr qu'au moins un tiroir contienne deux cravates ou plus.

Montrer que dans une réunion d'au moins six personnes, il y en a au moins trois qui se connaissent ou trois qui ne se connaissent pas. Pour résoudre ce problème il faut d'abord le modéliser. Pour ce faire on utilise un graphe :

- les sommets sont les six personnes ;
- il y a une arête entre deux personnes si et seulement si elles se connaissent.

La question revient à trouver une clique K_3 ou une anti-clique $\overline{K_3}$ (une **anti-clique d'ordre k** est un ensemble indépendant de k sommets).

On peut également modéliser le problème par un coloriage d'arêtes : on considère $\Gamma = K_6$; les sommets représentent les six personnes :

- une arête entre deux personnes est coloriée en bleu si ces deux personnes se connaissent.
- une arête entre deux personnes est coloriée en rouge si ces deux personnes ne se connaissent pas.

Résoudre ce problème équivaut à trouver une clique K_3 monochromatique.

Remarque 10.2.1. Il ne s'agit pas de coloration au sens introduit au chapitre 7 ; c'est pourquoi nous utilisons ici le terme de **coloriage**. En outre, seules les arêtes sont coloriées.

On généralise ce genre de question de la façon suivante.

Étant donnés deux entiers $r, s \geq 1$, existe-t-il un entier $n = n(r, s)$ tel que pour tout 2-coloriage des arêtes de K_n avec les couleurs bleu, rouge,

K_n contienne un sous-graphe K_r colorié en bleu ou un sous-graphe K_s colorié en rouge ? Le plus petit entier n vérifiant cette propriété est appelé **nombre de Ramsey** et il est noté $R(r, s)$. De manière équivalente, $R(r, s)$ est le plus petit entier positif N tel que tout graphe Γ d'ordre N contient une clique d'ordre r ou un ensemble indépendant d'ordre s .

Nous utiliserons l'une et l'autre de ces définitions. L'existence des nombres de RAMSEY n'est pas a priori un résultat évident.

Théorème 10.2.2 (RAMSEY, 1930). *Soient $r, s \geq 1$ deux entiers. Il existe un plus petit entier $R(r, s)$ tel que pour tout $n \geq R(r, s)$, si les arêtes de K_n sont coloriées en bleu et rouge, alors il existe $K_r \subset K_n$ aux arêtes bleues ou il existe $K_s \subset K_n$ aux arêtes rouges.*

Ce résultat est conséquence du théorème de ERDŐS-SZEKERES énoncé et démontré ci-dessous, théorème plus précis mais postérieur au résultat originel de RAMSEY.

On a clairement $R(r, s) = R(s, r)$, $r, s \geq 1$, il suffit d'inverser le rôle des couleurs des arêtes.

On a aussi $R(r, 1) = R(1, r) = 1$, toutes les arêtes de K_1 étant de la même couleur !

Enfin $R(r, 2) = R(2, r) = r$: en effet $r - 1 < R(r, 2)$, car en coloriant toutes les arêtes de K_{r-1} en bleu, il n'y a pas de sous-graphe K_r bleu, ni de sous-graphe K_2 rouge. Pour K_r : dans un coloriage quelconque des arêtes de ce graphe, soit toutes les arêtes sont rouges, d'où un sous-graphe K_r rouge, soit il existe une arête bleue d'où un sous-graphe K_2 bleu ; donc $R(2, r) = r$.

Théorème 10.2.3 (ERDŐS et SZEKERES, 1935). *Pour tous $r, s \geq 2$ le nombre $R(r, s)$ existe et on a :*

- i) $R(r, s) \leq R(r - 1, s) + R(r, s - 1)$;
- ii) $R(r, s) \leq \binom{r+s-2}{r-1}$;
- iii) *de plus si $R(r - 1, s)$ et $R(r, s - 1)$ sont des nombres pairs alors $R(r, s) \leq R(r - 1, s) + R(r, s - 1) - 1$.*

Démonstration. Montrons d'abord l'existence de $R(r, s)$ et l'inégalité i). Pour cela nous allons raisonner par récurrence sur $r + s \geq 4$.

Si $r + s = 4$, on a $r = s = 2$ et $R(2, 2) = 2 \leq 1 + 1 = R(1, 2) + R(2, 1)$. Supposons que pour $r + s < k$, ($k \geq 5$) les nombres $R(r, s)$ existent et vérifient l'inégalité i) ; soient r, s tels que $r + s = k$: les nombres $R(r - 1, s)$ et $R(r, s - 1)$ existent donc.

Montrons que tout graphe Γ ayant $n = R(r - 1, s) + R(r, s - 1)$ sommets

contient soit une clique K_r , soit un ensemble indépendant $\overline{K}_s$: soit x un sommet ; nous avons deux cas :

a) soit $d_\Gamma(x) \geq R(r-1, s)$.

Le sous-graphe induit par les sommets de $\Gamma(x)$ contient un sous-graphe induit $\gamma(x)$ de cardinal $R(r-1, s)$; comme $r-1+s < k$ on peut appliquer l'hypothèse de récurrence :

1) ou bien $\gamma(x)$ contient une clique K_{r-1} , donc en ajoutant le sommet x on obtient une clique K_r de Γ ,

2) ou bien $\gamma(x)$ contient un indépendant $\overline{K}_s$, donc Γ aussi ;

b) soit $d_\Gamma(x) < R(r-1, s)$ donc dans le graphe complémentaire $\overline{\Gamma}$, on a $d_{\overline{\Gamma}}(x) \geq R(r, s-1)$. On procède dans $\overline{\Gamma}$ de la même manière que ci-dessus ; ainsi $\overline{\Gamma}$ contient une clique K_s ou un ensemble indépendant de taille r car $R(r, s-1) = R(s-1, r)$ et en inversant les couleurs. Mais alors Γ contient une clique K_r ou un ensemble indépendant $\overline{K}_s$.

Nous avons montré que tout graphe d'ordre $n = R(r-1, s) + R(r, s-1)$ contient une clique de taille r ou un ensemble indépendant $\overline{K}_s$: cela prouve que $R(r, s)$ existe et que

$$R(r, s) \leq R(r-1, s) + R(r, s-1). \quad (10.2)$$

ii) On raisonne par récurrence sur $r+s \geq 4$. Pour $r+s=4$ on a $r=s=2$ et $R(2, 2) = 2 \leq C_2^1 = 2$. Pour passer de k à $k+1$ il suffit d'appliquer (10.2) en se souvenant que les coefficients du binôme vérifient $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$.

En effet : $R(r, s) \leq R(r-1, s) + R(r, s-1) \leq \binom{r+s-3}{r-2} + \binom{r+s-3}{r-1} = \binom{r+s-2}{r-1}$.

iii) On raisonne de la même manière que pour i). Soit Γ un graphe avec $n = R(r-1, s) + R(r, s-1) - 1$. D'après le lemme 1.1.9 nous savons que le nombre de sommets ayant leur degré impair est pair ; comme Γ a un nombre impair de sommet, il s'ensuit que Γ contient un sommet de degré pair. Soit x un tel sommet ; on a : $d_\Gamma(x) + d_{\overline{\Gamma}}(x) = R(r-1, s) + R(r, s-1) - 2$; donc

a') $d_\Gamma(x) \geq R(r-1, s)$ car $d_\Gamma(x) \neq R(r-1, s) - 1$; on raisonne de la même manière que dans le a) ;

b') $d_\Gamma(x) < R(r-1, s)$, donc $d_\Gamma(x) \leq R(r-1, s) - 2$ et dans le graphe complémentaire $\overline{\Gamma}$: $d_{\overline{\Gamma}}(x) \geq R(r, s-1) = R(r-1, s)$; on raisonne de la même manière que dans b).

Nous avons montré que si $R(r-1, s)$ et $R(r, s-1)$ sont des nombres pairs alors tout graphe d'ordre $n = R(r-1, s) + R(r, s-1) - 1$ contient une clique de taille r ou un ensemble indépendant $\overline{K}_s$. $\square$

Utilisons le i) du théorème 10.2.3 pour montrer que $R(3, 3) = 6$. On a déjà $R(3, 3) \leq R(3 - 1, 3) + R(3, 3 - 1) = R(2, 3) + R(3, 2) = 6$ car $R(r, 2) = R(2, r) = r$. Maintenant pour montrer que $R(3, 3) > 5$, il suffit de trouver un 2-coloriage de K_5 qui ne contient pas de clique bleue à 3 sommets ni de clique rouge à 3 sommets. La figure 10.1 répond à cette question.

Théorème 10.2.4. $R(3, 3) = 6$.

Ce qui répond à la question du début de ce paragraphe.

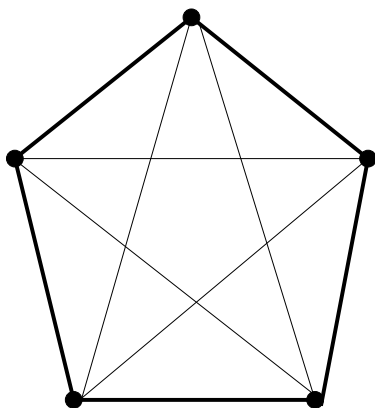


Figure 10.1 – Coloriage de K_5 . Le coloriage a été réalisé de sorte que K_5 ne contienne ni un K_3 colorié en bleu (arêtes fines), ni un K_3 colorié en rouge (arêtes épaisses).

Théorème 10.2.5. $R(3, 4) = 9$.

Démonstration. En appliquant le iii) du théorème 10.2.3 et le théorème 10.2.4 on a : $R(3, 4) \leq 9$. Pour prouver l'égalité on cherche un 2-coloriage K_8 ne contenant ni K_3 rouge, ni K_4 bleu : la figure 10.2 donne une telle configuration. $\square$

Théorème 10.2.6. $R(3, 5) = 14$.

Démonstration. On applique le théorème 10.2.3 et le théorème 10.2.5, on obtient $R(3, 5) \leq 14$. Pour prouver l'égalité on cherche un 2-coloriage de K_{13} ne contenant ni une clique K_3 , ni un ensemble indépendant $\overline{K_5}$: la figure 10.3 fournit une telle configuration. $\square$

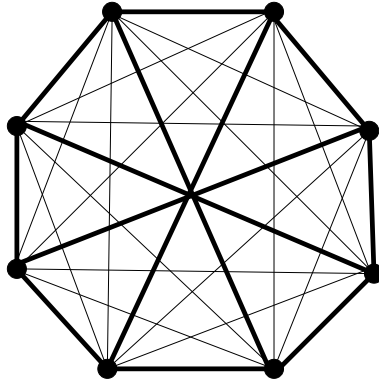


Figure 10.2 – Coloriage de K_8 . Le coloriage de K_8 est tel qu'il ne contienne ni un K_4 colorié en bleu (arêtes fines), ni un K_3 colorié en rouge (arêtes épaisses).

Déterminer les nombres de RAMSEY est une tâche très difficile : si on conjecture que $R(r, s) = n$, il faut d'abord montrer que tout graphe ayant n sommets contient une clique K_r ou une anti-clique $\overline{K}_s$, puis montrer que n est le plus petit entier vérifiant cette propriété. Quelques nombres de RAMSEY sont donnés dans le tableau ci-dessous.

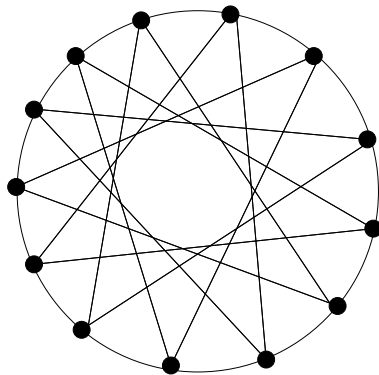


Figure 10.3 – Graphe à 13 sommets ne contenant ni K_3 , ni $\overline{K}_5$. Nous n'avons indiqué que les arêtes coloriées en rouge afin de ne pas alourdir le dessin. Après avoir complété la figure, le lecteur se convaincra qu'il n'y a pas de clique K_3 ou d'anti-clique $\overline{K}_5$ contenus dans ce graphe.

$\begin{array}{c} s \\ \diagdown \\ r \end{array}$	3	4	5	6	7	8	9
3	6	9	14	18	23	28	36
4	9	18	25				

On dispose également d'une borne inférieure donnée par le théorème suivant.

Théorème 10.2.7. $R(r, s) \geq (r-1)(s-1) + 1$.

Démonstration. Posons $n = (r-1)(s-1)$ et montrons qu'il existe un 2-coloriage de K_n pour lequel il n'y ait pas de clique K_r ni K_s monochromatique. Rangeons les sommets dans un tableau $(r-1) \times (s-1)$; si les sommets x et y sont sur la même ligne, on colorie l'arête $\{x, y\}$ en bleu; autrement on colorie cette arête en rouge. Maintenant prenons r sommets quelconques, alors nécessairement deux d'entre eux sont sur la même ligne (principe des tiroirs de DIRICHLET) donc K_n ne peut pas contenir de clique monochromatique rouge K_r .

De même si on prend s sommets, deux d'entre eux sont sur la même colonne, donc K_n ne peut pas contenir de clique monochromatique bleue K_s . $\square$

Les nombres de RAMSEY diagonaux $R(r, r)$ ont été plus particulièrement étudiés.

Théorème 10.2.8 (ERDŐS, 1947).

$$R(r, r) > 2^{\frac{r}{2}}, \quad r \geq 3.$$

Ce théorème a été prouvé par P. ERDŐS à l'aide de la théorie des graphes aléatoires.

En combinant le théorème 10.2.3 et le théorème 10.2.8 on obtient l'encadrement suivant.

Théorème 10.2.9. Pour $r \geq 3$

$$2^{\frac{r}{2}} \leq R(r, r) \leq 2^{2r-2}.$$

Démonstration. En effet $R(r, r) \leq \binom{2r-2}{r-1} \leq 2^{2r-2}$. □

On conjecture que $R(r, r) \simeq 2^{c \cdot r}$ (c constante), mais cela semble actuellement hors d'atteinte !

Pour terminer ce paragraphe donnons quelques encadrements connus :

- $43 \leq R(5, 5) \leq 49$.
- $35 \leq R(6, 4) \leq 41$, $58 \leq R(6, 5) \leq 87$, $102 \leq R(6, 6) \leq 165$.
- $49 \leq R(7, 4) \leq 61$, $80 \leq R(7, 5) \leq 143$, $113 \leq R(7, 6) \leq 298$,
 $205 \leq R(7, 7) \leq 540$.

10.3 Matroïdes

Dans ce paragraphe **les graphes sont supposés simples**.

Au § 2.2, nous avons rencontré l'algorithme de KRUSKAL qui détermine un arbre de poids minimum recouvrant un graphe. Le principe est le suivant : soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe connexe et $f : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ une valuation sur les arêtes. On ordonne les arêtes suivant l'ordre de valuation croissante et on traite ces arêtes une à une ; on fabrique un ensemble A en ajoutant une arête à A chaque fois que celle-ci ne forme pas un cycle avec les arêtes déjà sélectionnées. On obtient ainsi un arbre (d'après le théorème 2.2.1) $\Gamma(A)$ de valuation minimum, *i.e.* $\sum_{a \in E(A)} f(a)$ minimum.

L'algorithme construit une forêt ayant différentes composantes connexes ; d'après le théorème 2.2.1) on obtient un arbre.

Cet arbre, noté T , est de poids minimum : soit T_1 un arbre de recouvrement et a_i la première arête produite par l'algorithme (donc $a_i \in T$) et qui n'est pas dans T_1 ; donc $a_0, a_1, \dots, a_{i-1}$ sont des arêtes produites par l'algorithme qui appartiennent à la fois à T et à T_1 . Si on ajoute a_i à T_1 on obtient un cycle C , mais alors C contient une arête a qui n'est pas dans T (sinon T contiendrait un cycle). Maintenant remplaçons dans T_1 l'arête a par l'arête a_i : on obtient un nouvel arbre de recouvrement T_2 qui a plus d'arêtes en commun avec T que T_1 ; de plus $\omega(a_i) \leq \omega(a)$; sinon $\omega(a) < \omega(a_i)$ et il existerait dans $\{a_0, a_1, \dots, a_{i-1}\}$ des arêtes de T qui formeraient un cycle C' avec a dans T car autrement a aurait été choisi par l'algorithme ; mais les arêtes $\{a_0, a_1, \dots, a_{i-1}, a\}$ sont des arêtes de T_1 donc C' est un cycle de T_1 , absurde. Ainsi $\omega(a_i) \leq \omega(a)$ ce qui entraîne que $\omega(T_2) \leq \omega(T_1)$. On répète l'opération avec T_2 et ainsi de suite jusqu'à obtenir T . On a donc transformé T_1 en T en remplaçant

les arêtes une par une de telle sorte que le poids total à chaque étape ne soit pas augmenté. Par conséquent $\omega(T) \leq \omega(T_1)$.

Si on inverse l'ordre, c'est-à-dire si on ordonne les arêtes par ordre décroissant, on obtient un arbre de recouvrement de valuation maximum. Cet algorithme peut être généralisé en une classe d'algorithmes appelés **algorithmes gloutons**.

Soit U un ensemble fini et $\mathcal{H}$ une famille de sous-ensembles de U ; le couple $(U; \mathcal{H})$ est appelé **système héréditaire** si $\mathcal{H}$ est stable par inclusion, c'est-à-dire si :

$$A \in \mathcal{H} \text{ et } B \subset A \implies B \in \mathcal{H}.$$

Un élément de $\mathcal{H}$ est appelé **ensemble héréditaire**.

Exemple 10.3.1. Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe, notons U_Γ l'ensemble des sous-graphes sans cycle de Γ . On considère la famille $\mathcal{H}$ de tous les sous-ensembles de U_Γ , alors $(U_\Gamma; \mathcal{H})$ forme un système héréditaire, appelé **système héréditaire graphique**.

Le **problème d'optimisation** associé au système héréditaire $(U; \mathcal{H})$ est le suivant : soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^+$ une valuation; l'objectif est de trouver un ensemble héréditaire A tel que la valuation $f(A) = \sum_{a \in A} f(a)$ soit optimum (maximum ou minimum). Comme la valuation f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, le problème revient à trouver un ensemble héréditaire A de cardinal maximum ou minimum tel que la valuation $f(A) = \sum_{a \in A} f(a)$ soit optimum (maximum ou minimum).

Par exemple, déterminer un ensemble d'arbres de recouvrement de valuation minimale d'un graphe $\Gamma = (V; E)$ est le problème d'optimisation associé au système héréditaire $(E, \mathcal{H})$ où E est l'ensemble des arêtes de Γ et $\mathcal{H}$ l'ensemble de toutes les parties de E formant une forêt. On peut donc généraliser l'algorithme de KRUSKAL de la manière suivante :

liste : glouton(liste : U , liste : $\mathcal{H}$, tableau d'éléments : tabf)

liste : $T == \text{null}$;

Début

 ordonner les éléments de U suivant leur valuation;

 (on obtient : $\text{tabf}[u_1] \leq \text{tabf}[u_2] \leq \dots \leq \text{tabf}[u_m]$)

Pour Tout i , i de 0 à m , **Faire**

Si $T \cup \{u_i\} \in \mathcal{H}$ **alors**

 ajouter u_i à T ;

FinSi

FinPour
Retourner T ;
Fin

Dans le cas particulier où le problème d'optimisation est de déterminer un ensemble d'arbres de valuation minimale recouvrant un graphe $\Gamma = (V; E)$. Nous avons vu au chapitre 2 que l'algorithme glouton, qui est dans ce cas l'algorithme de KRUSKAL, fournit une solution convenable, c'est-à-dire donne une forêt dont la valuation est minimum. Pour un système héréditaire arbitraire, l'algorithme glouton donne toujours une solution mais celle-ci n'est pas forcément optimum, c'est-à-dire qu'il retourne un ensemble héréditaire mais celui-ci n'a pas nécessairement une valuation optimum. Nous allons donner un exemple : rappelons d'abord qu'un couplage dans un graphe $\Gamma = (V; E)$ est un ensemble d'arêtes n'ayant aucun sommet commun ; trouver un couplage de poids maximum dans un graphe dont les arêtes sont valuées, c'est trouver un couplage C dont la somme des valuations des arêtes de C est maximum. Le système héréditaire associé à ce problème est $(E, \mathcal{H})$ où $\mathcal{H}$ est l'ensemble de tous les couplages de Γ (voir figure 10.4).

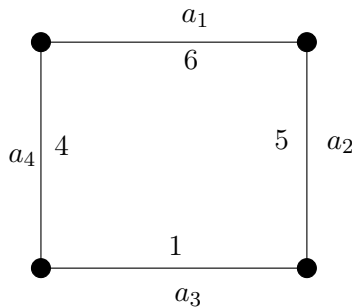


Figure 10.4 – Recherche de couplage et algorithme glouton. L'algorithme glouton choisit l'arête a_1 qui est de poids maximum, puis l'arête a_3 dont la valuation est 1. La valuation de ce couplage est donc égale à 7. Or les deux autres arêtes de ce cycle forment également un couplage dont la valuation est 9 : l'algorithme glouton ne donne pas de solution optimale dans ce cas.

La question qui se pose est la suivante : à quelle condition l'algorithme glouton donne-t-il une solution optimale ?

Un système héréditaire $(U; \mathcal{H})$ est un **matroïde** s'il satisfait la propriété suivante.

Propriété d'augmentation.

$$A, B \in \mathcal{H} \text{ et } |A| < |B| \implies \exists a \in B \setminus A : A \cup \{a\} \in \mathcal{H}.$$

Lemme 10.3.2. *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

- i) *Si $A, B \in \mathcal{H}$ et $|A| < |B|$, il existe $a \in B \setminus A$ tel que $A \cup \{a\} \in \mathcal{H}$.*
- ii) *Si $A, B \in \mathcal{H}$ avec $|B| = |A| + 1$, il existe $a \in B \setminus A$ tel que $A \cup \{a\} \in \mathcal{H}$.*

Démonstration. Le fait que i) entraîne ii) est trivial. Montrons l'implication inverse.

Soient $A, B \in \mathcal{H}$ et $|A| < |B|$. Comme $(U, \mathcal{H})$ est un système héréditaire, pour tout $B' \subset B$ on a $B' \in \mathcal{H}$. On choisit un $B' \subset B$ avec $|B'| = |A| + 1$, donc il existe $a \in B' \setminus A \subset B \setminus A$ tel que $A \cup \{a\} \in \mathcal{H}$. $\square$

Dans l'exemple de la figure 10.4, prenons $A = \{a_4\}$ et $B = \{a_1, a_3\}$: la propriété d'augmentation n'est pas vérifiée. Par conséquent le système héréditaire associé au problème du couplage de poids maximum n'est pas un matroïde.

La notion de matroïde est liée à l'algorithme glouton par le théorème suivant.

Théorème 10.3.3. *Soit $(U; \mathcal{H})$ un système héréditaire. L'algorithme glouton donne une solution optimale au problème d'optimisation associé au système héréditaire $(U; \mathcal{H})$ si et seulement si $(U; \mathcal{H})$ est un matroïde.*

Démonstration. Supposons que la propriété d'augmentation ne soit pas satisfaite. Soient $A, B \in \mathcal{H}$ et $|A| < |B|$ tels qu'il n'existe pas de $a \in B \setminus A$ tel que $A \cup \{a\} \in \mathcal{H}$. D'après le lemme 10.3.2 on peut supposer que $|B| = |A| + 1$. Définissons une valuation sur U de la manière suivante : on pose $k = |A|$ et

$$f(a) = \begin{cases} k + 2 & \text{si } a \in A, \\ k + 1 & \text{si } a \in B \setminus A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarquons que A n'est pas une solution optimum (pour la valuation f) du problème d'optimisation associé au système héréditaire $(U; \mathcal{H})$ car $f(A) = k(k + 2) < (k + 1)^2 \leq f(B)$.

L'algorithme glouton choisit en premier tous les éléments de A car ils sont de poids maximum. Mais A n'est pas optimal donc il existe $a \in U$ tel que $f(A) < f(A \cup \{a\})$. Or on a :

- soit $f(a) = 0$;
- soit $a \in B \setminus A$.

Dans le premier cas on n'augmente pas le poids d'une solution et dans le second cas, d'après notre hypothèse $A \cup \{a\} \notin \mathcal{H}$: l'algorithme glouton ne fournit pas une solution optimale.

Supposons maintenant que $(U; \mathcal{H})$ soit un matroïde. Soit $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ un ensemble héréditaire obtenu en appliquant l'algorithme glouton à f et soit $B = \{b_1, b_2, \dots, b_l\}$ un ensemble héréditaire quelconque, où l'on a ordonné les éléments de A et de B par ordre de poids décroissant. La propriété d'augmentation entraîne que $1 \leq l \leq k$ car sinon il existerait un b_i qui devrait être ajouté à A par l'algorithme glouton. Notons $A_t = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_t\}$ et $B_t = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_t\}$ avec $1 \leq t \leq l$. Nous allons montrer que $f(A_t) \geq f(B_t)$ pour $1 \leq t \leq l$. Pour ce faire on raisonne par récurrence.

D'abord $f(A_1) \geq f(B_1)$ car l'algorithme glouton commence par choisir un l'élément de valuation maximum.

Supposons maintenant que $f(A_t) \geq f(B_t)$ pour tout $1 \leq t < l$. En appliquant la propriété d'augmentation il existe $b \in B_{t+1} \setminus A_t$ tel que $A_t \cup \{b\} \in \mathcal{H}$. Mais alors $f(a_{t+1}) \geq f(b)$ sinon l'algorithme glouton aurait choisi b au lieu de a_{t+1} . On a également $f(b) \geq f(b_{t+1})$ car les éléments de B sont ordonnés par poids décroissants. De là :

$$f(A_{t+1}) = f(A_t) + f(a_{t+1}) \geq f(A_t) + f(b_{t+1}) \geq f(B_t) + f(b_{t+1}) \geq f(B_{t+1}).$$

Par conséquent A est un ensemble héréditaire de cardinal maximum et de poids maximum. $\square$

Corollaire 10.3.4. *Tous les ensembles héréditaires de poids maximum ont même cardinal.*

Démonstration. Soient A et B deux ensembles héréditaires de poids maximum. Comme la valuation est à valeurs positives, leur cardinal est maximum. Supposons que $|A| < |B|$; d'après la propriété d'augmentation il existe $b \in B \setminus A$ tel que $A \cup \{b\} \in \mathcal{H}$ ce qui contredit la maximalité de A . $\square$

Corollaire 10.3.5. *Soit $\Gamma = (V; E)$ un graphe et soit $(U_\Gamma; \mathcal{H})$ le système héréditaire graphique associé ; alors $(U_\Gamma; \mathcal{H})$ est un matroïde appelé matroïde graphique.*

Démonstration. Au chapitre 2 nous avons vu que l'algorithme de KRUSKAL donne une (bonne) solution. Ainsi en appliquant le théorème 10.3.3 on obtient le résultat. $\square$

Un autre matroïde associé à un graphe est le suivant : soit $\vec{\Gamma} = (V; \vec{E})$ un digraphe ; notons $\mathcal{H}$ l'ensemble de tous les sous-ensembles A de $\vec{E}$ tels que dans A deux arcs n'ont jamais la même extrémité terminale ; on vérifie facilement que $(\vec{E}; \mathcal{H})$ est un système héréditaire.

Proposition 10.3.6. *Le système héréditaire défini ci-dessus est un matroïde.*

Démonstration. Un ensemble héréditaire de valuation maximum peut être construit de la manière suivante : on choisit pour un sommet x tel que le degré entrant vérifie $d^-(x) \neq 0$; l'arc ayant ce sommet terminal est de poids maximum. Il est facile de vérifier que dans ce cas l'algorithme glouton donne une solution optimum. $\square$

Un autre exemple intéressant de matroïde est le suivant : soit U un ensemble de n éléments et $\mathcal{H}$ l'ensemble de toutes les parties X de U telles que $|X| \leq k$, pour $1 \leq k \leq n$; alors $(U; \mathcal{H})$ est un matroïde appelé **matroïde uniforme de degré k** . Si $k = n$ ce matroïde est aussi appelé **matroïde libre**.

Remarque 10.3.7. WHITNEY⁴ et VAN DER WAERDEN⁵ ont introduit la notion de matroïde comme une généralisation de la notion d'indépendance vectorielle. La généralisation de l'algorithme de KRUSKAL aux matroïdes ne vient que plus tard avec D. GALE⁶ et D.J.A. WELSH⁷ en 1968. Dans ce paragraphe nous avons préféré introduire les matroïdes de manière algorithmique, c'est-à-dire en partant de l'algorithme de KRUSKAL : cela nous a paru moins théorique.

Théorème 10.3.8. *Soit U un ensemble fini de parties d'un espace vectoriel V et soit $\mathcal{H}$ l'ensemble de toutes les parties formées de vecteurs linéairement indépendants de U : $(U; \mathcal{H})$ est un matroïde.*

4. Voir H. WHITNEY. On the Abstract Properties of linear Dependence, *American J. Math.* 57 (1935), 509–533.

5. Voir B.L. VAN DER WAERDEN. *Modern Algebra* (second edition), Springer, Berlin, 1937.

6. Voir D. GALE. Optimal assignments in an ordered set: An application of matroid theory, *J. of Comb. Theory* 4 (1968), 176–180.

7. Voir D.J.A. WELSH. KRUSKAL's theorem for matroids. *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 64 (1968), 3–4.

Démonstration. En effet il suffit d'appliquer le ii) du lemme 10.3.2 qui n'est autre, dans ce cas, que l'axiome d'échange des systèmes linéairement indépendants dans un espace vectoriel. $\square$

10.4 Hypergraphes

La notion d'**hypergraphe** est une généralisation de la notion de graphe. Le nom d'hypergraphe a été donné par C. BERGE dans les années 1960 : dans ce contexte une arête ne relie plus un ou deux sommets, mais un nombre arbitraire de sommets.

Formellement un hypergraphe (fini) H est un couple $(V; E)$ où $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ est un ensemble non vide et $E = (e_i)_{i \in I}$ est une famille de parties non vides de V . Les éléments de V sont les **sommets** et les éléments de E sont les **hyperarêtes**.

Dans ce qui suit de plus on supposera que :

$$\bigcup_{i \in I} e_i = V,$$

ce qui interdit les sommets isolés.

Un hypergraphe **simple** est un hypergraphe $H = (V; E)$ tel que : $e_i \subseteq e_j \implies i = j$.

Un hypergraphe est **linéaire** s'il est simple et pour toute paire d'hyperarêtes e_i, e_j , $i \neq j$ on a $|e_i \cap e_j| \leq 1$.

Exemple d'hypergraphe

Aux championnats du monde d'athlétisme, il y a plusieurs épreuves : le 100 mètres, le 200 mètres, le marathon, le lancer du poids, le saut en hauteur... S'il y a, disons, m épreuves, on peut créer un hypergraphe de la manière suivante :

- les sommets sont les athlètes ;
- l'hyperarête e_i est constituée par l'ensemble des athlètes qui concourent à l'épreuve i , $1 \leq i \leq m$.

Un matroïde est un hypergraphe.

Soit $H = (V; E)$ un hypergraphe sans sommet isolé ayant n sommets et m hyperarêtes. La **matrice d'incidence** de H est la matrice $n \times m$ à coefficients 0 ou 1 définie de la manière suivante :

$$\mathcal{A}_{n,m} = (a_{i,j})_{(i,j) \in \{1,2,\dots,n\} \times \{1,2,\dots,m\}}$$

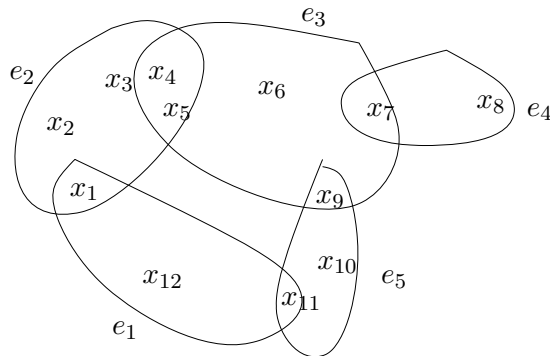


Figure 10.5 – Représentation d'un hypergraphe ayant 12 sommets et 5 hyperarêtes.

telle que :

$$\forall a_{i,j} \in \mathcal{A}_{n,m}, \quad a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \in e_j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut remarquer que la correspondance entre hypergraphe et matrice d'incidence est biunivoque. La transposée de la matrice $\mathcal{A}_{n,m}$ est également une matrice d'incidence d'un hypergraphe que l'on notera $H^* = (V^*; E^*)$. C'est l'**hypergraphe dual**. Dans l'hypergraphe dual les rôles respectifs des sommets et des hyperarêtes sont inversés.

Soit $H = (V; E)$, $E = (e_i)_{i \in I}$, un hypergraphe sans sommet isolé. Comme pour un graphe on peut définir le **line-graphe** ou **graphe représentatif** de H ; c'est le graphe simple $\Gamma = (V_\ell ; A_\ell)$.

- V_ℓ est l'ensemble I qui indexe les hyperarêtes ;
- $a = \{i, j\} \in A_\ell$ si $e_i \cap e_j \neq \emptyset$.

Graphes et hypergraphes sont reliés par la proposition suivante.

Proposition 10.4.1. *Tout graphe simple fini $\Gamma = (V; E)$ est isomorphe au line-graphe d'un hypergraphe. De plus si Γ est sans arête isolée, cet hypergraphe est linéaire.*

Démonstration. Soit $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. On définit un hypergraphe $H = (W ; A)$ de la façon suivante :

- $W = E$;
- A est la famille $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ où $A_i = \{e \in E : x_i \in \varepsilon(e)\}$.

Soit $H_\ell = (W_\ell ; A_\ell)$ le graphe ainsi défini :

- W_ℓ est l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ qui indexe les hyperarêtes $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$;

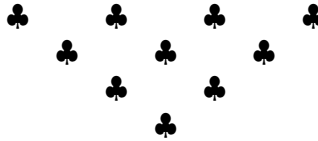
- $i, j \in W_\ell$ sont adjacents si et seulement si $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, c'est-à-dire si et seulement si x_i et x_j sont adjacents dans Γ .

Il est alors clair que H_ℓ est isomorphe à Γ .

H peut avoir des hyperarêtes répétées : si $\{x_i, x_j\} \in E$ est une arête isolée, on a $A_i = A_j$; si Γ est sans arête isolée, H est linéaire. $\square$

Exercice 10.3. Soit $\Gamma = K_{1,3}$

- i) Montrer que Γ n'est le line-graphe d'aucun graphe.
- ii) Dessiner l'hypergraphe construit à la proposition 10.4.1 dont Γ est le line-graphe.



Bibliographie

- [1] C. BERGE, *Graphs*. North-Holland, 1985.
- [2] B. BOLLOBÁS, *Modern Graph Theory*. Springer, 1998.
- [3] G. CHARTRAND & L. LESNIAK, *Graphs & Digraphs*, fourth edition. CRC Press, 2005.
- [4] N. BIGGS, *Algebraic Graph Theory*. Cambridge Tracts in Mathematics 67, Cambridge University Press, 1974.
- [5] R. DIESTEL, *Graph Theory*, third edition. Springer-Verlag Heidelberg, New York, 2005.
- [6] C.D. GODSIL & G. ROYLE, *Algebraic Graph Theory*. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [7] J.L. GROSS & T.W. TUCKER, *Topological Graph Theory*. Wiley-Interscience, 1987.
- [8] J.L. GROSS & J. YELLEN, *Graph Theory and its Applications*, second edition. CRC Press, 2007.
- [9] F. HARARY, *Graph Theory*. Addison-Wesley, 1991.
- [10] J. LAURI & R. SCAPELLATO, *Topics in Graph Automorphisms and Reconstruction*. Cambridge University Press, 2003.
- [11] B. MOHAR & C. THOMASSEN, *Graphs on Surfaces*. John Hopkins University Press, 2001.
- [12] W.T. TUTTE, *Graph Theory*. Cambridge University Press, 2001.
- [13] V.I. VOLOSHIN, *Introduction to Graph and Hypergraph Theory*. Nova Science Publishers, 2009.
- [14] D.B. WEST, *Introduction to Graph Theory*. Prentice Hall, 1996.
- [15] J.R. WILSON, *Introduction to Graph Theory*. Addison Wesley Longman, 1996.
- [16] J.R. WILSON & J.J. WATKINS, *Graphs: An Introductory Approach*. John Wiley & Sons, 1990.

Index

- action
 - équivalente, 295
 - de groupe, 294
 - fidèle, 294
 - transitive, 296
- adjoint d'un endomorphisme, 302
- affectation dans un algorithme, 22
- algorithme, 22
 - de Kruskal, 43
 - efficace, 26
 - glouton, 348
- anneau, 206
 - commutatif, 206
 - unitaire, 206
- anti-clique d'ordre k , 341
- application K -linéaire, 207
- arête, 2
 - adjacente, 2
 - incidente, 2
 - pendante, 6
 - simple, 3
- arête-connexité, 100
- arête-recouvrement, 246
 - minimum, 246
- arborescence, 45, 63
 - attachée à un sommet, 46
 - binaire complète, 47
 - ordonnée, 47
 - parfaite, 47
 - recouvrante, 46
- arbre, 39, 63
 - (arborescence binaire), 67
 - (digraphe), 188
 - binaire de recherche, 68
 - binaire quasi parfait à gauche, 74
 - de priorité, 74
 - de recouvrement, 43
 - de Steiner, 43
- arc, 14
 - géométrique, 131
 - négatif, 117
 - positif, 117
 - simple, 14
- automorphisme
 - d'arêtes, 282
 - d'arêtes induit, 283
 - de digraphe, 287
 - de graphe, 30
 - préservant les couleurs, 288
- AVL, 79
- base
 - canonique, 209
 - d'un espace vectoriel, 207
 - orthonormale, 301
- base standard de l'espace
 - des arcs, 192
 - des sommets, 192
- bit, 91
- bloc, 103
- borne
 - inférieure, 33
 - supérieure, 33
- boucle, 2
- boucle (algorithme), 23
- branche, 47
- capacité, 113
 - d'une coupe, 113

- carré latin, 272
- chaîne, 7
 - élémentaire, 8
 - alternée, 249
 - eulérienne, 51
 - fermée, 8
 - hamiltonienne, 55
 - simple, 8
- chemin, 15
 - élémentaire, 15
 - arc-disjoint, 123
 - hamiltonien, 58
 - simple, 15
- circuit, 15
 - hamiltonien, 58
- circulation, 199
- clôture d'un graphe, 56
- classe
 - à droite modulo H , 296
 - à gauche modulo H , 296
- clique, 10
- cocircuit, 202
- cocycle, 194, 197
 - fondamental, 194
 - minimal, 202
- coefficients d'une matrice, 208
- coloration
 - des arêtes, 227
 - des sommets, 214
 - par listes des arêtes, 242
 - par listes des sommets, 242
- combinaison K -linéaire, 207
- comparaison, 22
- complémentaire, 18
- complexité d'un algorithme, 24
- composante
 - connexe, 9, 280
 - fortement connexe, 16
 - impaire, 256
- concaténation de chaînes, 7
- conditionnel, 22
- conjecture
 - de la coloration des arêtes par listes, 243
 - du graphe parfait, 239
 - forte du graphe parfait, 239
- contraction
 - dans un multigraphe, 160
 - forte dans un multigraphe sans boucle, 318
- corang d'un ensemble d'arêtes, 328
- corde, 8
- corps, 206
 - de base, 206
- couleur incidente à un sommet, 227
- coupe, 113
 - minimum, 113
- couplage, 246
 - maximum, 246
 - parfait, 246
- courbe simple, 132
- cycle, 8
 - eulérien, 51
 - fondamental, 194
 - hamiltonien, 55
 - orienté, 193
- cycle (permutation circulaire), 278
- degré
 - d'un sommet, 6
 - entrant, 14
 - maximum, 6
 - minimum, 6
 - moyen, 6
 - sortant, 14
- dessin d'un graphe, 132
- déterminant d'une matrice, 210
- diagramme commutatif, 28
- diamètre d'un graphe, 11

-
- différence (de graphes), 20
 - digraphe, 14
 - arc-transitif, 300
 - de Cayley, 287
 - eulérien, 54
 - fortement connexe, 15
 - hamiltonien, 58
 - pseudo-symétrique, 54
 - régulier, 15
 - semi-eulérien, 54
 - semi-hamiltonien, 58
 - semi-régulier, 15
 - simple, 17
 - dimension d'un espace
 - vectorel, 207
 - distance
 - entre deux sommets, 11
 - sur un ensemble, 32
 - distribution des degrés, 6
 - dual combinatoire, 204
 - éclatement, 274
 - élément
 - maximal, 33
 - minimal, 33
 - neutre, 33
 - plus grand, 33
 - plus petit, 33
 - endomorphisme, 207
 - hermitien, 302
 - hermitien positif, 313
 - ensemble
 - arête-séparant, 123
 - arête-séparant minimum, 123
 - arc-séparant, 123
 - arc-séparant minimum, 123
 - héréditaire, 348
 - indépendant, 216, 245
 - indépendant maximum, 216
 - préordonné, 32
 - stable, 216, 245
 - transversal, 246
 - transversal minimum, 246
 - enveloppe convexe, 268
 - épaisseur, 165
 - espace
 - des arcs d'un digraphe, 192
 - des cocycles, 194, 197
 - des cycles, 194, 197
 - des sommets d'un digraphe, 192
 - métrique, 32
 - propre, 302
 - étoile, 36
 - excentricité, 11
 - extrémité d'une arête, 2
 - famille
 - génératrice, 207
 - libre, 207
 - feuille, 41, 64
 - f -facteur, 274
 - file de priorité, 74
 - fil, 46
 - flot, 113
 - maximum, 115
 - fonction d'incidence
 - dans un digraphe, 14
 - dans un graphe, 2
 - fonction majorée, 24
 - forêt, 41
 - (digraphe), 188
 - de recouvrement, 192
 - orientée, 46
 - formule d'Euler, 148
 - frère, 46
 - genre d'un graphe, 167
 - G -module, 295
 - G -morphisme, 296
 - graphe

- acyclique, 8
- arête-isomorphe, 282
- arête-transitif, 298
- biparti, 36
- complet, 10
- connexe, 8
- d'intervalles, 241
- de comparabilité, 240
- des blocs, 106
- dual, 161
- eulérien, 51
- hamiltonien, 55
- induit, 9
- isomorphe, 27
- k -arête-colorable, 227
- k -arête-connexe, 100
- k -colorable, 214
- k -connexe, 99
- k -liste-colorable, 242
- k -parti, 35
- k -parti complet, 35
- k -régulier, 6
- k -sommet-connexe, 99
- non orienté, 2
- nul, 5
- orienté, 14
- orientable, 16
- parfait, 239
- partiel, 9
- régulier, 6
- semi-eulérien, 51
- semi-hamiltonien, 55
- simple, 4, 17
- simplifié, 137
- sommet-transitif, 298
- symétrique, 298
- triangulaire, 286
- graphe représentatif
 - d'un graphe, 58
 - d'un hypergraphe, 354
- graphe sous-jacent
 - à une chaîne, 10, 51
 - d'un digraphe, 16
- groupe, 33
 - abélien (ou commutatif), 34
 - de permutations, 277
 - opérant sur un ensemble, 294
 - symétrique, 277
- hauteur
 - d'un sommet, 47
 - d'une arborescence, 47
- homomorphisme de graphes, 233
- hyperarête, 353
- hypergraphe, 353
 - dual, 354
 - linéaire, 353
 - simple, 353
- image d'une application
 - linéaire, 207
- immersion, 234
- indépendance linéaire, 207
- indice
 - chromatique, 227
 - chromatique par listes, 242
 - de partition par cliques, 238
- intersection (de graphes), 20
- invariant de graphe, 336
- inverse d'un élément dans un groupe
 - multiplicatif, 34
- isomorphisme
 - d'arêtes, 282
 - d'arborescences binaires, 67
 - de K -espaces vectoriels, 207
 - de digraphes, 29
 - de graphes, 27
- isthme, 10
- itérateur, 23

- k -arête-coloration, 227
- k -coloration (arêtes), 227
- k -coloration (sommets), 214
- k -cubes, 37
- k -face-coloration, 224
- k -facteur, 263
- k -factorisation, 263
- k -partition, 35
- k -sommets-coloration, 214
- K -espace vectoriel, 206
- lattice-graphe, 286
- lemme
 - des arcs coloriés, 201
 - des poignées de main, 11
- ligne polygonale, 134
- line-graphe, 58, 282, 354
- liste
 - d'arêtes, d'arcs, 20
 - de multiplicité, 21
- longueur
 - d'un chemin, 15
 - d'une chaîne, 7
- méthode des chaînes, 109
- maille d'un graphe, 12
- majorant, 33
- mathématique effective, 25
- matrice, 208
 - associée à une application linéaire, 209
 - bistochastique, 267
 - carrée, 209
 - de passage, 210
 - de permutation, 267
 - des degrés d'un graphe, 187
 - doublement stochastique, 267
 - extraite, 209
 - hermitienne, 303
 - identité, 211
 - inversible, 211
 - laplacienne d'un graphe, 313
 - produit, 209
 - stochastique, 267
 - totale unimodulaire, 190
 - transposée, 209
- matrice d'adjacence d'un graphe, 21, 183
- matrice d'incidence
 - d'un digraphe, 186
 - d'un graphe, 21, 186
 - d'un hypergraphe, 353
- matroïde, 349
 - graphique, 351
 - libre, 352
 - uniforme de degré k , 352
- mineur
 - principal d'ordre k , 310
 - relatif à un coefficient, 318
- minorant, 33
- morphisme, 233
- multi-arête, 3
- multi-arc, 14
- multigraphe contractile, 160
- niveau, 47, 74
 - rempli dans un arbre, 74
 - rempli dans une arborescence binaire, 67
- nombre
 - chromatique, 214
 - chromatique par listes, 242
 - cyclomatique, 198
 - de croisements, 165
 - de Ramsey, 342
 - de stabilité, 246
 - de transversalité, 246
- norme hermitienne, 301
- noyau
 - d'un morphisme, 238

- d'une action, 294
- d'une application linéaire, 208
- nullité d'un graphe, 192
- octet (byte), 91
- orbite, 295
- ordre
 - d'un graphe, 4
 - postfixé, 65
 - préfixé, 65
 - relation d', 33
 - total, 33
- orientation, 16
- orthogonal d'un ensemble, 212
- p*-arc, 14
- p*-arête, 3
- partie convexe, 268
- père, 46
- permutation, 277
- plongements, 234
 - planairement équivalents, 155
 - topologiquement équivalents, 157
- poids, 17
- point de Steiner, 43
- polynôme
 - chromatique, 322
 - de Tutte, 329
 - dichromatique, 327
- polynôme caractéristique
 - d'un endomorphisme, 302
 - d'un graphe, 305
- pont, 10
- préordre, 32
- priorité, 75
- problème
 - d'optimisation, 348
 - des mariages, 245
 - du voyageur de commerce, 59
 - euclidien de Steiner, 43
 - polynomialement réductible, 26
- produit scalaire
 - canonique sur $\mathbb{C}^n$, 211, 301
 - non dégénéré, 301
- profondeur d'un sommet, 47, 74
- puits, 14
- racine, 45, 63
- rang
 - d'un ensemble d'arêtes, 328
 - d'un graphe, 192
 - d'une application linéaire, 207
- rangée d'une matrice, 271
- rectangle latin, 272
- relation d'équivalence, 32
 - associée à un préordre, 32
- réseau, 113
 - associé à un graphe biparti, 255
- rotation, 79
- Rubik's cube*, 12
- scalaire d'un corps, 206
- simplifié, 137
- somme directe, 208
- somme de deux sous-espaces vectoriels, 208
- sommet, 2
 - accessible, 15
 - adjacent, 2
 - central, 12
 - connecté, 8
 - d'articulation, 103
 - d'un hypergraphe, 353
 - initial, 14
 - interne, 47
 - isolé, 6
 - pendant, 6
 - terminal, 14
- sommet-connexité, 100

-
- source, 14
 - sous-espace vectoriel, 206
 - supplémentaire, 208
 - sous-graphe, 9
 - spectre
 - d'un endomorphisme, 302
 - d'un graphe, 305
 - stabilisateur, 295
 - structure dans un langage, 62
 - subdivision, 158
 - sudoku*, 214
 - support d'une permutation, 278
 - symbole de Kronecker, 192
 - système
 - de représentants, 266
 - générateur, 287
 - héréditaire, 348
 - héréditaire graphique, 348
 - tas, 76
 - théorème
 - d'Euler, 52
 - de Appel-Haken, 225
 - de Birkhoff-von Neumann, 269
 - de Bouwer, 293
 - de Brooks, 221
 - de Dirac, 57
 - de Erdős-Szekeres, 342
 - de Ford-Fulkerson, 120
 - de Frucht, 293
 - de Gallai, 247
 - de Galvin, 243
 - de Hall, 252
 - de Heawood, 224
 - de Jordan, 140
 - de König, 227, 249, 267
 - de König-Egerváry, 271
 - de Kirchhoff (*matrix-tree theorem*), 319
 - de Kuratowski, 159
 - de Lovász, 239
 - de MacLane, 206
 - de Menger, 124, 126
 - de Möbius, 167
 - de Ore, 57
 - de Petersen, 260, 264
 - de Ramsey, 342
 - de Thomassen, 243
 - de Tutte, 257, 334, 336
 - de Vizing, 229
 - de Wagner, 161
 - de Whitney, 126, 156, 205, 285
 - de Woodall, 58
 - des quatre couleurs, 225
 - des mariages, 252
 - du graphe parfait, 239
 - théorie de la complexité, 25
 - trace d'une matrice carrée, 311
 - tri topologique, 48
 - union
 - de graphes, 20
 - disjointe de graphes, 20
 - valeur totale d'un flot, 115
 - valeur propre
 - d'un endomorphisme, 302
 - d'un graphe, 305
 - valuation, 17
 - vecteur
 - dans un espace vectoriel, 206
 - orthogonal, 301
 - propre d'un endomorphisme, 302
 - voisin, 6
 - voisinage
 - d'un sommet, 6
 - d'un sous-ensemble de sommets, 6

Symboles utilisés

Notation	Description	
$\binom{n}{k}$	coefficient binomial	18
$([x, y], n)$	arête	2
$[x, y]$	partie à 1 ou 2 éléments	2
$[[x, y]]$	segment (fermé) d'extrémités x et y	134
A^*	matrice adjointe de la matrice A	302
$A^\perp$	orthogonal d'une partie A de K^n	212
$\mathcal{A}(E, F)$	ensemble des applications de E dans F	207
$\mathfrak{A}$	endomorphisme associé à la matrice d'adjacence A	305
$\alpha'(\Gamma)$	cardinal maximum d'un couplage d'un graphe Γ	246
$\alpha(\Gamma)$	nombre de stabilité du graphe Γ	216
$\text{Aut}(\Gamma)$	groupe d'automorphismes du graphe Γ	30
$\text{Aut}^\#(\Gamma)$	groupe d'automorphismes d'arêtes induit de Γ	283
$\text{Aut}_E(\Gamma)$	groupe d'automorphismes d'arêtes de Γ	282
$\text{Aut}_{\text{coul}}(\overrightarrow{\text{Cay}}(G, S))$	groupe d'automorphismes préservant les couleurs d'un digraphe de CAYLEY	288
$\mathcal{B}'_m$	base standard de l'espace vectoriel des arêtes ou des arcs	192
$\mathcal{B}_n$	base standard de l'espace vectoriel des sommets	192
$\mathfrak{B}$	base canonique de $\mathbb{C}^n$	301
$\beta'(\Gamma)$	cardinal minimum d'un arête-recouvrement du graphe Γ	246
$\beta(\Gamma)$	nombre de transversalité du graphe Γ	246
$\mathfrak{b}(\Gamma)$	graphe des blocs du graphe Γ	106

Notation	Description	
$C^o(V_1, V_2)$	cocycle d'un (di)graphe	194
$C_0(\Gamma)$	espace vectoriel des sommets du graphe Γ	197
$C_0(\vec{\Gamma})$	espace vectoriel des sommets du digraphe $\vec{\Gamma}$	192
$C_1(\Gamma)$	espace vectoriel des arêtes du graphe Γ	197
$C_1(\vec{\Gamma})$	espace vectoriel des arcs du digraphe $\vec{\Gamma}$	192
C_n	cycle de longueur n	8
$\mathbb{C}^V$	espace vectoriel des fonctions définies sur V et à valeur dans $\mathbb{C}$	305
$\text{Conv}(A)$	enveloppe convexe d'une partie A d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel	268
$c(X, \overline{X})$	capacité de la coupe $(X, \overline{X})$	113
c_Γ	nombre de composantes connexes de Γ	328
$\overrightarrow{\text{Cay}}(G, S)$	digraphe de CAYLEY	287
$\text{Cl}(\Gamma)$	clôture du graphe Γ	56
$\text{corang}_\Gamma(A)$	corang de $A \subset E(\Gamma)$	328
$\text{Cr}(\Gamma)$	nombre de croisements d'un graphe simple Γ	165
$\det(A)$	déterminant de la matrice A	210
$d^+(x)$	degré sortant du sommet x	14
$d^-(x)$	degré entrant du sommet x	14
$\Delta(\Gamma)$	degré maximum du graphe Γ	6
$\delta(\Gamma)$	degré minimum du graphe Γ	6
$d(\Gamma)$	degré moyen du graphe Γ	6
$d_\Gamma(x)$ ou $d(x)$	degré du sommet x dans Γ	6
$\text{diam}(\Gamma)$	diamètre du graphe Γ	11
$E(\Gamma)$	ensemble des arêtes du graphe Γ	2
$E_1 \oplus E_2$	somme directe de deux sous-espaces vectoriels	208
E_λ	espace propre associé à la valeur propre λ	302
$\varepsilon(C)$	ensemble des extrémités des arêtes du couplage C	248
$E(\vec{\Gamma})$	ensemble des arcs du digraphe $\vec{\Gamma}$	14
$\text{Ep}(\Gamma)$	épaisseur d'un graphe simple Γ	165
$\varepsilon : E \longrightarrow P_2(V)$	fonction d'incidence d'un graphe $(V; E)$	2
$\text{ex}(x)$	excentricité du sommet x	12
$\mathbb{F}_2$	corps à deux éléments	189

Notation	Description	
$f _E$	restriction de l'application f à E	283
Γ/e	contraction de l'arête e dans un multigraphe Γ	160
Γ	graphe non orienté	2
$\Gamma(V')$	sous-graphe de Γ induit par $V' \subset V(\Gamma)$	9
$\Gamma(X)$	voisinage d'une partie $X \subset V(\Gamma)$	6
$\Gamma - x$	graphe moins un sommet	9
$\Gamma//a$	contraction forte d'une arête a dans un multigraphe sans boucle Γ	318
$\Gamma \setminus a$	graphe privé d'une arête a	9
Γ^c	dual combinatoire du graphe Γ	204
Γ_σ^*	dual d'un graphe planaire Γ associé au plongement σ	161
Γ_s	simplifié du graphe Γ	137
$\Gamma_1 + \Gamma_2$	union disjointe des deux graphes Γ_1 et Γ_2	20
$\Gamma_1 \cap \Gamma_2$	intersection des deux graphes Γ_1 et Γ_2	20
$\Gamma_1 \cup \Gamma_2$	union des deux graphes Γ_1 et Γ_2	20
$\Gamma_1 \setminus \Gamma_2$	différence du graphe Γ_1 par le graphe Γ_2	20
$\overline{\Gamma}$	graphe complémentaire du graphe Γ	18
$\overrightarrow{\Gamma}$	graphe orienté ou digraphe	14
$\overrightarrow{\Gamma}_{s,p}$	réseau associé à un graphe biparti Γ	255
$\gamma(\Gamma)$	genre du graphe Γ	167
$\gamma = \xi([0, 1])$	courbe simple	132
$\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$	ensemble des endomorphismes hermitiens de $\mathbb{C}^n$	302
$\text{Hom}_G(G_1, G_2)$	ensemble des morphismes de G -modules de G_1 dans G_2	297
$\text{Isom}_E(\Gamma_1, \Gamma_2)$	ensemble des isomorphismes d'arêtes de Γ_1 dans Γ_2	282
$\text{Im}(f)$	image d'une application linéaire f ou d'un morphisme de groupe f	207
i et $t : \overrightarrow{E} \longrightarrow V$	fonctions d'incidence d'un digraphe	14
$K^{m,n}$	ensemble des matrices sur un anneau ou un corps K	208

Notation	Description	
K_n	graphe complet d'ordre n	10
$K_{1,n}$	graphe étoile	36
$K_{n_1,n_2,\dots,n_k}$	graphe k -parti complet	36
$\overline{K_n}$	anti-clique d'ordre n	341
$\text{Ker}(f)$	noyau d'une application linéaire ou d'un morphisme de groupe f	208
$\kappa(\Gamma)$	sommet-connexité du graphe Γ	100
$L(\Gamma)$	line-graphe ou graphe représentatif du graphe Γ	58
$L_2(n)$	lattice-graphe	286
$\mathcal{L}(E,F)$	ensemble des applications linéaires de E dans F	207
$\mathfrak{L}(\Gamma)$	laplacien du multigraphe Γ	313
$\lambda(\Gamma)$	arête-connexité du graphe Γ	100
$\mathcal{M}_{m,n}(K)$	ensemble des matrices sur un anneau ou un corps K	208
$\mu(\Gamma)$	maille du graphe Γ	12
$\mathcal{NP}$	classe de complexité non déterministe polynomiale	26
$\mathcal{NPC}$	classe de complexité non déterministe polynomiale complète	26
$\nu(\Gamma)$	nullité du graphe Γ	192
$\omega(\Gamma)$	ordre maximal des cliques du graphe Γ	10
$\omega(f)$	valeur totale du flot f	115
$P_2(V)$	ensemble des parties de V à 1 ou 2 éléments	1
P_Γ	polynôme chromatique d'un multigraphe Γ	322
$\Phi(\Gamma, x)$	polynôme caractéristique du graphe Γ	305
$\Phi(\Gamma)$	ensemble des faces d'un graphe planaire Γ	145
$\Phi(u, x)$	polynôme caractéristique de l'endomorphisme u	302
$\mathcal{P}$	classe de complexité polynomiale	26
$\overset{\circ}{P}$	intérieur d'une ligne polygonale P	134

Notation	Description	
Q_k	k -cube ou hypercube	37
$q(\Gamma)$	nombre de composantes impaires de Γ	256
$R(u, x)$	quotient de RAYLEIGH	304
$\mathbb{R}^k$	espace euclidien de dimension k	131
$\mathbb{R}^+$	ensemble des réels positifs	43
$\mathcal{R} = (V; \vec{E}, s, p, c)$	réseau	113
$\text{rang}_\Gamma(A)$	rang de $A \subset E(\Gamma)$	328
$\rho(\Gamma)$	rang du graphe Γ	192
$\text{Sp}(\Gamma)$	spectre du graphe Γ	305
$\text{Sp}(u)$	spectre de l'endomorphisme u	302
$\mathfrak{S}_V$	groupe de permutations de l'ensemble V	277
$\mathfrak{S}_n$	groupe de permutations d'un ensemble fini de cardinal n	277
$\sigma : V \sqcup E \longrightarrow T$	dessin d'un graphe sur un espace topologique T	132
$\sigma : \Gamma \longrightarrow T$	plongement d'un graphe Γ dans un espace topologique T	132
$T(n)$	graphe triangulaire	286
$\theta(\Gamma)$	indice de partition par cliques du graphe Γ	238
tA	matrice transposée de la matrice A	209
$\tau : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$	isomorphisme planaire entre deux graphes planaires Γ et Γ'	155
$\text{tr}(A)$	trace de la matrice carrée A	311
u^*	endomorphisme adjoint de u	302
$V(\Gamma)$	ensemble des sommets du graphe Γ	2
$V(\vec{\Gamma})$	ensemble des sommets du digraphe $\vec{\Gamma}$	14
$\chi'(\Gamma)$	indice chromatique du graphe Γ	227
$\chi'_\ell(\Gamma)$	indice chromatique par listes du graphe Γ	242
$\chi(\Gamma)$	nombre chromatique du graphe Γ	214
$\chi_\ell(\Gamma)$	nombre chromatique par listes du graphe Γ	242